退化、时滞微分系统

蒋 威 著

安徽大学出版社

此书得到安徽大学２１１工
程学术专著出版基金资助

退化、时滞微分系统
蒋威 著

安徽大学出版社出版发行
(合肥市肥西路 3 号 邮码 230039)
肥西县印刷有限责任公司印刷 新华书店经销

开本 850×1168 1/32 印张 7 5 字数 185 千字
1998 年 10 月第 1 版 1998 年 10 月第 1 次印刷
印数 1000 册

特约编辑 张康培 责任编辑 李梅 封面设计 孟献辉

ISBN 7-81052-187-X/O·11 定价 12.80 元
如有印装质量问题，请与出版社联系调换

序

1974 年, H.H.Rosenbrock 在讨论复杂的电网问题时, 建立了退化微分系统. 这是本方向已知的最早的研究工作.

由于诸如控制系统、管理系统、生态系统、电力系统、工业工程系统等实际系统中大量涌现退化的情形, 使这一分支引起国内外学者的广泛关注, 并且出现了系统研究的专著. 如 1982 年 S.L.Campbell 的 " Singular Systems of Differential Equations " 和 1988 年 U.E.Boyarinchev 的 " Solution of Ordinary Differential Equation of Degenerate System " 等等. 但是迄今为止, 研究工作主要限于常微系统的情形, 或者说没有顾及广泛存在的至关重要的时滞的影响. 而本书作者近年来对这一课题的研究工作则充分考虑了时滞的普遍存在. 内容涉及: 借助广义逆阵完整地建立了线性系统的基本理论, 进而讨论了解的稳定性、周期解的存在性、系统的可控性和最优控制及其应用等等问题, 得到较为系统的结果. 本书是这些工作的总结, 是上述两专著的自然发展.

限于篇幅, 对微分方程与控制理论的一般概念和理论, 本书都假定读者已经具备, 书中只引用有限的、必需的广义逆阵知识. 因而, 可供系统论、控制论、现代管理、工业工程和其它相关领域的科学研究人员、工程技术人员和研究生使用. 有兴趣的读者一定可以从中看到大量有待解决与推广的研究问题.

相信本书的出版, 一定能引起广泛的兴趣, 使更多的同行加入到这一研究领域.

郑祖庥

一九九八年二月

目　录

引　言 …………………………………… (1)

§0.1　背景与意义 …………………………… (1)

§0.2　本书所做的工作 ………………………… (3)

第一章　预备知识 ………………………… (6)

§1.1　异矩阵束 ……………………………… (6)

§1.2　正则矩阵 ……………………………… (14)

§1.3　广义逆阵 ……………………………… (18)

第二章　退化时滞微分系统 ………………… (27)

§2.1　时滞微分系统及其分类 ………………… (27)

§2.2　退化滞后线性微分系统的可解性 ………… (31)

§2.3　退化时滞控制系统的输出反馈正常化 ….. (38)

第三章　退化时滞系统的解 ………………… (46)

§3.1　退化时滞微分系统解的指数估计 ………… (46)

§3.2　退化滞后线性微分系统的解 …………… (52)

§3.3　退化中立型微分系统的常数变易公式和通解 ……………………………………… (73)

§3.4　退化时滞差分系统的解 ………………… (89)

第四章　退化时滞微分系统的稳定性和周期解 ……. (101)

§4.1　退化时滞微分系统稳定性的 V- 泛函方法 . (101)

§4.2　二维退化时滞微分系统全时滞稳定性的代数判据 …………………………………… (115)

§4.3 三维退化时滞微分系统全时滞稳定性的代数判据 …………………… (126)
§4.4 退化时滞微分系统的周期解问题 ………… (148)
第五章 时滞系统的能控性 ……………………… (154)
§5.1 退化时滞控制系统的能控性 ……………… (154)
§5.2 滞后控制系统的能控性与终点时刻间的相关性 ……………………………… (169)
§5.3 线性滞后系统的输出能控性 ……………… (173)
§5.4 中立型线性控制系统的能控性 ………… (178)
§5.5 非线性中立型控制系统的函数能控性 ….. (182)
第六章 时滞系统的最优控制问题 ………………… (191)
§6.1 滞后非线性系统的一般化最优控制 ……. (191)
§6.2 状态右端受限的滞后控制系统的最优控制 (199)
§6.3 中立型线性控制系统的最优控制 ………. (206)
§6.4 时滞现金管理系统的最优控制 ………… (215)
参考文献 ……………………………… (222)

引 言

§0.1 背景与意义

大约在两个世纪以前，人们就发现了第一个泛函方程. 从此，人们对泛函方程逐渐有所认识. 特别是近 20 年来，随着对诸如管理系统、生态系统、电力系统、工业工程系统等实际系统的建模、设计、分析和应用的深入发展，人们越来越重视时滞现象，并进行了系统的研究，取得了实质的、全面的进展.

同时人们也发现，系统的退化现象也是实际系统的普遍现象. 从 60 年代开始到现在，关于时滞微分系统的研究已有长足发展. 而关于退化微分系统则是从 70 年代以来才有所研究. 所得结果越来越精确地描述了现实世界中的动力系统.

首先提出研究退化动态系统问题的是 H.H.Rosenbrock，他在讨论复杂的电网系统中，建立了退化的微分系统，并对此作了比较系统的研究. 接着， D.G.Luenberger 发现动态投入产出系统是典型的退化系统. 近 10 年来关于退化系统的研究，也有很大的进展. S.L Campbell 的专著 Singular Systems of Differential Equations，和 Boyarinchev.U.E. 的 Solution of Ordinary Differential Equation of Degenerate System，非常系统地总结了退化微分系统方面的许多

论文的主要成果，已经成为退化微分系统的经典论著. 我国学者戴立意的专著 Singular Control Systems, 也比较全面地集中了广义控制系统的诸多论文的精华.

可以说，关于时滞系统和退化系统的研究，近年来已有非常大的发展. 但是这两方面的研究尚有许多问题需要进一步讨论.

我们注意到，在许多实际系统中，要对其准确地描述，从而对其更精确地设计、分析和应用，就必需同时考虑时滞的影响和退化现象.

例 1.1　某企业有两种产品，在时刻 t 库存量分别为 $x_1(t)$, $x_2(t)$. 设 $x(t)=(x_1(t),x_2(t))^T$, 这里 "T" 表示转置; 并设 $u(t)=(u_1(t),u_2(t))^T$ 为这两种产品的生产率，$s(t)=(s_1(t),s_2(t))^T$ 为两种产品的销售率. 则有

$$\dot{x}(t)=-s(t)+u(t) \tag{1.1}$$

一般说来，销售率 $s(t)$ 与产品在 t 时刻及 $t-1$ 时刻的库存量 $x(t),x(t-1)$ 有关，而且与 t 时刻库存率 $\dot{x}(t)$ 有关，设 $s(t)=E_1\dot{x}(t)-Ax(t)-Bx(t-1)$, 代入 (1.1) 得

$$(I_2+E_1)\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-1)+u(t) \tag{1.2}$$

其中 $I_2\in R^{2\times 2}$ 为二阶的单位矩阵.

如果 $|I_2+E_1|=0$, 则该系统即为退化时滞系统.

由此可见，既含有时滞又具有退化性的系统的确是普遍存在的. 很有必要对其进行深入讨论. 但是对这类系统的研究，由于其难度较大，到目前为止尚不多见. 其基本理论、稳定性、控制理论和应用，需要一系列的系统的研究. 这也将成为具有十分重要的理论价值和实用价值的研究领域.

§0.2 本书所做的工作

本书就是基于上节所述的思想，对时滞微分系统和退化时滞微分系统的基本理论、稳定性、能控性和最优控制等理论问题及其应用作深入研究，并给出一些重要结论．全书共分六章．

第一章给出本书所必需的预备知识，讨论奇异矩阵束，正则矩阵和广义逆阵的基本知识．

第二章首先对时滞系统进行分类，给出广义时滞微分系统、退化滞后微分系统、退化中立型微分系统等等概念．随后给出退化时滞微分系统的形式及其等价形式，讨论其可解性，得到了其可解的判别条件．最后，我们就退化滞后微分控制系统的输出反馈正常化问题，给出充分必要条件．

第三章讨论了退化滞后线性微分系统的解的指数估计和退化线性系统解的表示问题．第一节就退化滞后微分系统，给出了其解的指数估计式．在第二节中，对退化滞后线性微分系统进行讨论，得到解的表示．然后，就退化中立型微分系统进行分解，用迭加原理得到其常数变易公式和通解．最后，还就退化时滞差分系统进行讨论，给出其通解．

第四章主要给出关于退化时滞微分系统的稳定性和周期解问题的结果．第一节介绍时滞微分系统稳定性的V－泛函方法．第二节、第三节分别给出二维和三维退化时滞微分系统的全时滞稳定的代数判据．第四节就退化时滞微分系统的周期解的存在问题进行讨论，特别是讨论了二维退化滞后微分系统的周期解存在问题，给出相应结果．

第五章研究了时滞系统的能控性问题. 共分五节讨论. 其中, 第一节讨论退化时滞控制系统的能控性, 得到一些充要条件. 第二节讨论滞后控制系统的能控性与终点时刻间的相关性, 给出一系列能控性的新概念和有效判据. 第三节讨论线性滞后系统的输出能控性, 给出完全输出能控性、输出能控集等概念, 得到其完全输出能控的充要条件. 第四节讨论中立型线性控制系统的能控性问题, 得到一些能控的充要条件. 第五节讨论非线性中立型控制系统函数能控性, 用全新的概念和方法, 得到一些重要结果.

第六章有四节, 分别讨论了时滞系统的一般化最优控制、状态右端受限的滞后控制系统的最优控制、中立型线性控制系统的最优控制和时滞现金管理系统的最优控制, 并得到一些结果. 这些理论和应用均创造性地拓广了最优控制理论和应用.

在本书的写作过程中, 得到了王志成教授和郑祖庥教授的无微不至的关怀和悉心指导. 他们严谨的治学态度, 渊博的学术知识和无私的奉献精神给我留下了深刻的印象, 他们高瞻远瞩, 见解精辟, 正是在他们的指导和帮助下, 本书才得以顺利完成.

真诚地感谢湖南大学应用数学系的钱祥征教授、庾建设教授和黄立宏教授, 他们一直关心着本书的进展, 并在个方面给予了很大的帮助.

特别感谢张康培教授, 他在本书的写作过程中, 给予了很多的指导和帮助.

此书的大部分内容曾在王志成教授指导下的应用数学讨论班和郑祖庥教授指导下的泛函微分方程讨论班中讨论过, 受益匪浅. 在此对讨论班的各位师长, 各位同仁和各位师兄弟的有益讨论和帮助表示由衷的感谢.

也感谢湖南大学应用数学系的领导和各位老师所给予的亲切关怀和帮助.

我还要感谢安徽大学各级领导和同事对我的支持和关心.

最后，我还要对我的家人多年来给予我的真诚的支持和无私的奉献，表示深深的谢意.

此外，由于书稿仓促付印，不妥之处在所难免，敬祈读者批评指正.

第一章 预备知识

本章我们给出本书所必需的预备知识，在第一节中我们讨论奇异矩阵束的概念，第二节我们来讨论正则矩阵，第三节给出广义逆阵的基本知识.

§1.1 异矩阵束

本节我们给出异矩阵束的基本概念和相应的基本知识.

定义 1.1 对于阶数同为 $m \times n$ 的两个矩阵 A,B 和纯数变量 λ, 称 $A + \lambda B$ 为矩阵束.

一般地，我们将所有的矩阵束分成正则矩阵束和异矩阵束两类.

定义 1.2 如果 A,B 同为 n 阶方阵，且行列式 $|A + \lambda B|$ 不衡等于零，则称矩阵束 $A + \lambda B$ 为正则矩阵束. 称矩阵对 (A, B) 为正则的矩阵对.

定义 1.3 对于阶数同为 $m \times n$ 的两个矩阵 A, B, 如果 $m \neq n$, 或者 $m = n$ 且行列式 $|A + \lambda B|$ 衡等于零，则称矩阵束 $A + \lambda B$ 为异矩阵束.

定义 1.4　对于阶数同为 $m\times n$ 的两个矩阵束 $A+\lambda B$ 和 $A_1+\lambda B_1$, 如果存在两个阶数分别为 m 和 n 的非奇异矩阵 P 和 Q, 使得

$$P(A+\lambda B)Q=A_1+\lambda B_1.$$

则称矩阵束 $A+\lambda B$ 与矩阵束 $A_1+\lambda B_1$ 为严格相抵的.

对于阶数为 $m\times n$ 的异矩阵束 $A+\lambda B$, 设其秩为 r, 则或者 $r<n$, 或者 $r<m$. 不妨设 $r<n$. 则 $A+\lambda B$ 的列是线性相关的, 则方程

$$(A+\lambda B)x=0 \tag{1.1}$$

有非零解 x.

由于 (1.1) 的系数是 λ 的一次式, 其基本的线性无关解 x 常可这样选取, 使得它的元素都是 λ 的多项式. 我们只考虑这样一些解 $x(\lambda)$, 它是 λ 的多项式, 且在这些解中, 取最小次数 i 的解

$$\begin{aligned} x(\lambda) \quad &= x_0-\lambda x_1+\lambda^2 x_2-\cdots+(-1)\lambda^i x_i \\ &(x_i\neq 0) \end{aligned} \tag{1.2}$$

将其代入 (1.1), 并比较 λ 的系数得

$$\begin{cases} Ax_0=0, \\ Bx_0-Ax_1=0, \\ Bx_1-Ax_2=0, \\ \quad\cdots\cdots \\ Bx_{i-1}-Ax_i=0, \\ Bx_i=0. \end{cases} \tag{1.3}$$

则 (1.3) 关于 $x_0, -x_1, +x_2, \cdots, (-1)^i x_i$ 的系数矩阵

$$M_i = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B & A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & A \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix} \in R^{(i+2)m\times(i+1)n}$$

的秩 $r_i < (i+1)n$.

由于 i 是最小的，故矩阵

$$M_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$M_{i-1} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B & A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & A \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix} \in R^{(i+1)m\times in}$$

的秩 $r_0 = n, r_1 = 2n, \cdots, r_{i-1} = in$.

这样， i 是在式 $r_k \le (k+1)n$ 中使 $<$ 成立的最小的指标.

定理 1.1 如果 (1.1) 有最小次数 i 的解，且有 $i > 0$, 则矩阵束 $A + \lambda B$ 与矩阵束

$$\begin{pmatrix} L_i & 0 \\ 0 & \hat{A} + \lambda\hat{B} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

严格相抵. 其中

$$L_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \end{pmatrix}_{i\times(i+1)},$$

而 $\hat{A}+\lambda\hat{B}$ 是这样的矩阵束, 类似 (1.1) 的方程对于它没有次数小于 i 的解.

该定理的证明可分三步进行:

第一步证明矩阵束 $\hat{A}+\lambda\hat{B}$ 与

$$\begin{pmatrix} L_i & 0 \\ D+\lambda F & \hat{A}+\lambda\hat{B} \end{pmatrix}$$

严格相抵, 其中 $D, F, \hat{A}, \hat{B}$ 为适当阶的矩阵.

第二步证明方程

$$(\hat{A}+\lambda\hat{B})\hat{x}=0$$

不能有次数 $<i$ 的解 $\hat{x}(\lambda)$.

第三步证明上面的矩阵可以化为 (1.4).

详细证明请参见 [5], 由于篇幅所限, 这里从略.

下面我们讨论异矩阵束的标准式.

定理 1.2　对于阶数为 $m\times n$ 的异矩阵束 $A+\lambda B$, 若在其行之间和其列之间, 都没有常系数的线性相关性, 则矩阵束 $A+\lambda B$ 与

矩阵束

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1}(\lambda) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & L_{\varepsilon_p}(\lambda) & & & & \\ & & & L'_{\eta_1}(\lambda) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & L'_{\eta_q}(\lambda) & \\ & & & & & & A_0+\lambda B_0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

严格相抵. 其中

$$L_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \end{pmatrix}_{i\times(i+1)},$$

而矩阵束 $A_0+\lambda B_0$ 是正则的.

证明: 如果异矩阵束 $A+\lambda B$ 的列线性相关, 且方程 $(A+\lambda B)x=0$ 有次数小于 ε_1 的非零解, 由假定知 $\varepsilon_1>0$, 再由定理 1.1 可得, 该矩阵束与矩阵束

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & A_1+\lambda B_1 \end{pmatrix}$$

严格相抵. 其中方程 $(A_1+\lambda B_1)x^{(1)}=0$ 没有次数小于 ε_1 的解 $x^{(1)}$.

如果方程 $(A_1+\lambda B_1)x^{(1)}=0$ 有次数小于 ε_2 的非零解 (必有 $\varepsilon_1\le\varepsilon_2$), 由定理 1.1 可得，异矩阵束 $A+\lambda B$ 与矩阵束

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & A_2+\lambda B_2 \end{pmatrix}$$

严格相抵. 其中方程 $(A_2+\lambda B_2)x^{(2)}=0$ 没有次数小于 ε_2 的解 $x^{(2)}$.

如此继续下去，我们可将异矩阵束 $A+\lambda B$ 化为

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1}(\lambda) & & & & \\ & L_{\varepsilon_2}(\lambda) & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & L_{\varepsilon_p}(\lambda) & \\ & & & & A_p+\lambda B_p \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

其中 $0<\varepsilon_1\le\varepsilon_2\le\cdots\le\varepsilon_p$, 且方程 $(A_p+\lambda B_p)x^{(1)}=0$ 有次非零解.

如果异矩阵束 $A+\lambda B$ 的行线性相关，则矩阵束 $A_p+\lambda B_p$ 的转置矩阵束 $A_p'+\lambda B_p'$ 的列线性相关，由上可将其化为 (1.6) 的形式. 即存在 $0<\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q$ 使 $A+\lambda B$ 化为

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1}(\lambda) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & L_{\varepsilon_p}(\lambda) & & & & \\ & & & L'_{\eta_1}(\lambda) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & L'_{\eta_q}(\lambda) & \\ & & & & & & A_0+\lambda B_0 \end{pmatrix}$$

其中矩阵束 $A_0+\lambda B_0$ 的行与列都是线性无关的，即 $A_0+\lambda B_0$ 正则.

定理 1.3　一般地，对 $m\times n$ 异矩阵束 $A+\lambda B$, 存在非奇异矩阵 $P\in R^{m\times m}$ 和非奇异矩阵 $Q\in R^{n\times n}$, 使得 $P(A+\lambda B)Q$ 为标准形式

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & L_{\varepsilon_1}(\lambda) & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & L_{\varepsilon_p}(\lambda) & & & & \\ & & & & L'_{\eta_1}(\lambda) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & L'_{\eta_q}(\lambda) & \\ & & & & & & & A_0+\lambda B_0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

其中 $0\in R^{h\times g}$ 为零矩阵;

$$L_{\varepsilon_i}(\lambda)\in R^{\varepsilon_i\times(\varepsilon_i+1)}, (i=1,2,\cdots,p),$$

其形式为

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \end{pmatrix}_{\varepsilon_i\times(\varepsilon_i+1)}, \quad (i=1,2,\cdots,p),$$

而 $L'_{\eta_j}(\lambda) \in R^{(\eta_j+1)\times\eta_j}, (j=1,2,\cdots,q)$, 其形式为

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\eta_j+1)\times\eta_j}, \quad (j=1,2,\cdots,q),$$

$A_0+\lambda B_0 \in R^{s\times s}$, 为一个正则束. 这里

$$h+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_p+(\eta_1+1)+(\eta_2+1)+\cdots+(\eta_q+1)+s=m;$$

$$g+(\varepsilon_1+1)+(\varepsilon_2+1)+\cdots+(\varepsilon_p+1)+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+s=n.$$

证明: 一般说来, 矩阵束 $A+\lambda B$ 的行与列可能有常系数线性相关性. 设方程

$$(A+\lambda B)x=0 \tag{1.8}$$

与方程

$$(A'+\lambda B')x=0 \tag{1.9}$$

的常系数无关解的极大个数分别为 g 和 h.

对于方程 (1.8), 以其线性无关常数解 $e_1, e_2, \cdots, e_g$ 为 R^n 中基的前 g 个向量. 则对应的矩阵中前 g 列都是零

$$(0, A_1+\lambda B_1)$$

对于 $A_1+\lambda B_1$, 用完全类似的方法可使其前 h 个行变为零. 这样矩阵束 $A+\lambda B$ 可化为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^0+\lambda B^0 \end{pmatrix}$$

其中 $A^0+\lambda B^0$ 的行与列没有常系数线性相关性. 由定理 1.2 可得, 定理 1.3 成立.

§1.2 正则矩阵

上一节中, 我们给出了正则矩阵的概念, 我们将在本节中对其作进一步讨论.

定理 2.1 异矩阵对 (E,A) 为正则的充要条件为, 存在单位矩阵 I 和幂零矩阵 N, 使得异矩阵束 $A+\lambda B$ 与矩阵束

$$\begin{pmatrix} I+\lambda N & 0 \\ 0 & A_1+\lambda I \end{pmatrix}$$

严格相抵.

证明: 定理的充分性显然, 我们只需证明其必要性.

如果异矩阵束 $A+\lambda B$ 正则, 则存在常数 c 使得 $|A+cB|\neq 0$. 设 $D_1=A+cB$, 则

$$A+\lambda B=D_1+(\lambda-c)B$$

从而

$$D_1^{-1}(A+\lambda B)=I+(\lambda-c)D_1^{-1}B$$

用相似变换, 将其化为

$$\begin{aligned} I+(\lambda-c)&\begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} I-cJ_0+\lambda J_0 & 0 \\ 0 & I-cJ_1+\lambda J_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$ 为矩阵 $D_1^{-1}B$ 的准对角形发式.　J_0 为幂零矩阵，而 $|D_1| \neq 0$.

式 (2.1) 右的对角线上第一个子块乘以 $(I - cJ_0)^{-1}$, 第二个子块乘以 J_1^{-1}, 并设 $N = (I - cJ_0)^{-1}J_0, A_1 = J_1^{-1}(I - cJ_1)$，可得异矩阵束 $A + \lambda B$ 与矩阵束

$$\begin{pmatrix} I + \lambda N & 0 \\ 0 & A_1 + \lambda I \end{pmatrix}$$

严格相抵．而且，N 仍为幂零矩阵．定理 2.1 证毕.

由定理 2.1 不难证明在以后章节中要用到的定理：

定理 2.2　异矩阵对 (E, A) 为正则的充要条件为，存在单位矩阵 I 和幂零矩阵 N, 使得异矩阵束 $E\lambda - A$ 与矩阵束

$$\begin{pmatrix} I\lambda - A_1 & 0 \\ 0 & N\lambda - I \end{pmatrix}$$

严格相抵.

定理 2.3　设矩阵对 (E,A) 为正则，即存在某些 λ 使 $(\lambda E + A)^{-1}$ 存在，令

$$\hat{E}_\lambda = (\lambda E + A)^{-1}E,$$

$$\hat{A}_\lambda = (\lambda E + A)^{-1}A,$$

则有

$$\hat{A}_\lambda = I - \lambda \hat{E}_\lambda,$$

$$\hat{E}_\lambda \hat{A}_\lambda = \hat{A}_\lambda \hat{E}_\lambda.$$

证明：因为

$$\hat{E}_\lambda = (\lambda E + A)^{-1}E,$$

$$\hat{A}_\lambda = (\lambda E + A)^{-1} A,$$

我们有

$$\begin{aligned}\lambda \hat{E}_\lambda + \hat{A}_\lambda &= (\lambda E + A)^{-1} \lambda E + (\lambda E + A)^{-1} A \\ &= (\lambda E + A)^{-1} (\lambda E + A) = I\end{aligned}$$

因而有 $\hat{A}_\lambda = I - \lambda \hat{E}_\lambda$. 用 $\hat{E}_\lambda$ 分别左乘和右乘该式，得

$$\hat{E}_\lambda \hat{A}_\lambda = \hat{E}_\lambda (I - \lambda \hat{E}_\lambda) = \hat{E}_\lambda - \lambda \hat{E}_\lambda^2,$$

$$\hat{A}_\lambda \hat{E}_\lambda = (I - \lambda \hat{E}_\lambda) \hat{E}_\lambda = \hat{E}_\lambda - \lambda \hat{E}_\lambda^2,$$

故有 $\hat{E}_\lambda \hat{A}_\lambda = \hat{A}_\lambda \hat{E}_\lambda$. 定理 2.3 证毕.

定理 2.4 下列叙述是等价的

a） 矩阵对 (A, E) 正则的.

b） 如果 $X_0 = KerA = \{x : Ax = 0\}$, 而且

$$X_i = \{x : Ax \in EX_{i-1}\}, \quad (i = 0, 1, 2, 3, \cdots),$$

有：对所有的 $i = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 都有 $KerE \cap X_i = 0$

c） 如果 $Y_0 = KerA = \{x : Ax = 0\}$, 而且

$$Y_i = \{x : A^T x \in E^T Y_{i-1}\}, \quad (i = 0, 1, 2, 3, \cdots),$$

有：对所有的 $i = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 都有 $KerE \cap Y_i = 0$

d） 对所有的 $k = 1, 2, 3, \cdots$, 矩阵

$$G(k) = \begin{pmatrix} E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A & E & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A & E \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$$

列满秩.

e)　对所有的 $k = 1,2,3,\cdots$, 矩阵

$$F(k) = \begin{pmatrix} E & A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E & A \end{pmatrix}$$

行满秩.

证明：我们首先证明 *a*) 与 *b*) 的等价性.

如果 *a*) 不成立，则存在非零的 x, 使得对所有的数 λ 都有

$$(A + \lambda B)x = 0$$

我们可以将 x 表示为关于 λ 的阶数最小的多项式

$$x = x_0 + \lambda x_1 + \lambda x_2 + \cdots + \lambda^k x_k \tag{2.1}$$

其中 $x_0 \neq 0; x_k \neq 0$.

将 (2.1) 代入 $(A + \lambda B)x = 0$ 得

$$\begin{cases} Ex_0 = 0, \\ Ex_1 = -Ax_0, \\ Ex_2 = -Ax_1, \\ \quad \cdots\cdots \\ Ex_k = -Ax_{k-1}, \\ Ax_k = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

我们注意到,

$$x_k \in X_0, x_{k-1} \in X_1, x_{k-2} \in X_2, \cdots, x_0 \in X_k,$$

而且 $x_0 \in KerE, x_0 \neq 0$, 故 $b)$ 不成立. 即由 $b)$ 可得到 $a)$.

反之, 如果 $b)$ 不成立, 设 X_k 为第一个使

$$KerE \cap X_i, \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

非零的集. 并设 x_0 为 $KerE \cap X_k$ 中的非零元素. 由 X_k 的定义得存在唯一确定的 $x_1 \in X_{k-1}$, 使得 $Ax_0 = -Ex_{k-1}$.

类似地, 存在唯一确定的 $x_2 \in X_{k-2}, \cdots, x_k \in X_0$ 使得 (2.2) 成立. 故 $a)$ 不成立. 即由 $a)$ 可得到 $b)$.

综上所述, $a)$ 与 $b)$ 等价.

由于 $|E^T + \lambda A^T| \neq 0$ 等价于 $|E + \lambda A| \neq 0$, 因而可由 $a)$ 与 $b)$ 的等价性得到 $a)$ 与 $c)$ 的等价性.

$a)$ 与 $d)$ 的等价性和 $a)$ 与 $e)$ 的等价性, 可同理证明.

§1.3 广义逆阵

本节我们将叙述广义逆阵, 即半逆阵, 反形半逆阵, 准逆阵和 D- 逆阵的有关概念和若干结果.

首先, 我们来讨论半逆阵.

定义 3.1 对于阶数为 $m \times n$ 的矩阵 A, 若存在 $n \times m$ 的矩阵 X 满足

$$AXA = A \tag{3.1}$$

则称 X 为矩阵 A 的半逆阵. 一般地, 用 A^- 表示矩阵 A 的一个半逆阵.

一般说来, 任何矩阵的半逆阵不是唯一的. 但是我们有

定理 3.1 若 A^- 为矩阵 A 的一个半逆阵，则矩阵 A 的任何一个半逆阵 X 都可表示为

$$X = A^- + (I - A^-A)U + V(I - AA^-), \tag{3.2}$$

其中 I 为适当阶数的单位矩阵， U, V 为适当阶数的任意矩阵.

证明：我们先证明 (3.2) 满足 (3.1)

$$\begin{aligned} AXA &= A(A^- + (I - A^-A)U + V(I - AA^-))A \\ &= AA^-A + AIUA - AA^-AUA + AVIA - AVAA^-A \\ &= A_AUA + AUA + AVA - AVA = A \end{aligned}$$

反过来，我们证明，如果矩阵 X 满足 (3.1), 则其表示成 (3.2) 的形式.

其实，只要取 $U = X, V = A^-AX - A^-$ 即可．这时

$$\begin{aligned} &A^- + (I - A^-A)U + V(I - AA^-) \\ &\quad = A^- + (I - A^-A)X + (A^-AX - A^-)(I - AA^-) \\ &\quad = A^- + X - A^-AX + A^-Ax - A^-AXAA^- - A^- \\ &\qquad + A^-AA^- \\ &\quad = A^- + X - A^-AX + A^-Ax - A^-AA^- - A^- + A^-AA^- \\ &\quad = X \end{aligned}$$

定理 3.1 证毕.

定理 3.2 如果 $A_1 = PAQ$, 其中 P, Q 为非异矩阵，而 X 取遍矩阵 A 的所有半逆阵，则 $X_1 = Q^{-1}XP^{-1}$ 取遍矩阵 A_1 的所有半逆阵.

证明：如果 A^- 为矩阵 A 的半逆阵，设

$A_1^- = Q^{-1}A^-P^{-1}$,

则

$$\begin{aligned}A_1A_1^-A_1 &= PAQQ^{-1}A_1^-P^{-1}PAQ\\ &= PAA^-AQ = PAQ = A_1\end{aligned}$$

故 A_1^- 为 A_1 的半逆阵.

反之，如果 A_1^- 为 A_1 的半逆阵，则它必可表示成

$A_1^- = Q^{-1}A^-P^{-1}$

的形式. 其中矩阵 $A^- = QA_1^-P$ 是矩阵 A 的半逆阵. 事实上

$$\begin{aligned}AA^-A &= AQA_1^-PA\\ &= P^{-1}PAQA_1^-PAQQ^{-1}\\ &= P^{-1}A_1A_1^-A_1Q^{-1}\\ &= P^{-1}A_1Q^{-1}\\ &= P^{-1}PAQQ^{-1} = A\end{aligned}$$

定理 3.2 证毕.

定理 3.3 对分块矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 如果

$S = (I - A^-A)(B - BA^-A)^-$,

$R = A^- - SBA^-$

则矩阵 (R, S) 即为 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 的半逆阵.

证明:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}(R, S)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}(RA + SB) = \begin{pmatrix} ARA + ASB \\ BRA + BSB \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} AA^-A - ASBA^-A + A(I - A^-A)(B - BA^-A)^- \\ BA^-A - BSBA^-A + B(I - A^-A)(B - BA^-A)^-B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

定理 3.3 证毕.

同理我们可以证明

定理 3.4 对分块矩阵 (A, B) 如果

$S = (B - AA^-B)^-(I - AA^-)$,

$R = A^- - A^-BS$

则矩阵 $\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$, 即为 (A, B) 的半逆阵.

定理 3.3 和定理 3.4 分别给出了一种求半逆阵的方法.

例如, 对于阶数为 $m \times n$ 的矩阵 $\mathbf{A}$, 设 A_i 是由 A 的前 i 行构成的矩阵, a_k 表示矩阵 A 的第 k 行. 由定理 3.3, 我们可以得到求矩阵 A 的递推公式

$$A_{i+1}^- = (R_{i+1}, S_{i+1})$$

其中

$S_{i+1} = (I - A_i^- A_i)(a_{i+1} - a_{i+1}A_i^- A_i)^-$,

$R_{i+1} = A_i^- -_{i+1} S_{i+1}a_{i+1}A_i^-$,

$(i = 1, 2, \cdots, m - 1)$.

下面我们来讨论反形半逆阵.

定义 3.2 对于阶数为 $m \times n$ 的矩阵 A, 若存在 $n \times m$ 的矩阵 X 满足

$$AXA = A, XAX = X, \tag{3.3}$$

则称 X 为矩阵 A 的反形半逆阵. 一般地, 用 $A^\sim$ 表示矩阵 A 的一个反形半逆阵.

显然，反形半逆阵是特殊的半逆阵.

定理 3.5 若 A^- 为矩阵 A 的一个半逆阵，则矩阵 A 的任何一个反形半逆阵 X 都可表示为

$$\begin{aligned} X = \ & A^-AA^- + A^-AU(I-AA^-) + (I-A^-A)UAA^- \\ & +(I-A^-A)UAU(I-AA^-), \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 I 为适当阶数的单位矩阵， U 为适当阶数的任意矩阵.

证明：将 (3.4) 代入 (3.3) 可直接验证 X 为反形半逆阵.

如果 X 满足 (3.3), 取 $U = X - A^-AA^-$, 则

$$\begin{aligned} & A^-AA^- + A^-AU(I-AA^-) + (I-A^-A)UAA^- \\ & \quad +(I-A^-A)UAU(I-AA^-) \\ & = A^-AA^- + A^-A(X-A^-AA^-)(I-AA^-) \\ & \quad +(I-A^-A)(X-A^-AA^-)AA^- \\ & \quad +(I-A^-A)(X-A^-AA^-)A(X-A^-AA^-)(I-AA^-) \\ & = A^-AA^- + (A^-AX-A^-AA^-)(I-AA^-) \\ & \quad +(I-A^-A)(XAA^- - AA^-) \\ & \quad +(I-A^-A)(X-A^-AA^-)A(X-A^-AA^-)(I-AA^-) \\ & = X. \end{aligned}$$

定理 3.5 证毕.

定理 3.6 当 X 取遍矩阵 A 的所有半逆阵时, 矩阵 $Y = XAX$ 取遍矩阵 A 的所有反形半逆阵.

证明：设 X 为 A 的半逆阵，即 $XAX = A$, 则有

$$AYA = AXAXA = AXA = A,$$

$$\begin{aligned} YAY &= X(AXA)XAX = X(AXA)X \\ &= XAX = Y. \end{aligned}$$

故 $Y = XAX$ 为矩阵 A 的反形半逆阵.

如果 Y 是 A 的反形半逆阵，则

$$AYA = Y, YAY = Y.$$

由 $AYA = Y$ 知 Y 为 A 的半逆阵，取 $X = Y$, 则 X 为 A 的半逆阵，这时 $Y = YAY = XAX$. 定理 3.4 证毕.

接下来，我们讨论准逆阵.

定义 3.3　对于阶数为 $m \times n$ 的矩阵 A, 若存在 $n \times m$ 的矩阵 A^+ 满足

$$\begin{aligned} &1^0 \quad AA^+A = A, \\ &2^0 \quad A^+AA^+ = A^+, \\ &3^0 \quad (AA^+)^* = AA^+, \\ &4^0 \quad (A^+A)^* = A^+A, \end{aligned} \tag{3.5}$$

则称 A^+ 为矩阵 A 的准逆阵.

显然，准逆阵是一种特殊的反形逆阵.

定理 3.7　对于任何矩阵 A, 其准逆阵均存在且唯一，而且如果 $A = BC$, 则

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*. \tag{3.6}$$

证明：首先通过简单的验证可得，(3.6) 满足 (3.5) 的所有条件.

因而只需证明唯一性即可.

设 A_1^+, A_2^+ 为 A 的两个准逆阵，并设 $H = A_1^+ - A_2^+$ 则

$$\begin{aligned} AHA &= A(A_1^+ - A_2^+)A = AA_1^+A - AA_2^+A \\ &= A - A = 0. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} (HA)^* &= (A_1^+A - A_2^+A)^* = (A_1^+A)^* - (A_2^+A)^* \\ &= A_1^+A - A_2^+A = HA. \end{aligned}$$

同理可证 $(AH)^* = AH$. 这样，我们有

$$(HA)^*(HA) = HAHA = A0 = 0,$$

$$(AH)^*(AH) = AHAH = 0A = 0.$$

从而 $HA = 0, AH = 0$, 即

$$A_1^+ A = A_2^+ A, AA_1^+ = AA_2^+.$$

由此，我们有

$$A_1^+ = A_1^+ AA_1^+ = A_2^+ AA_1^+ = A_2^+ AA_2^+ = A_2^+$$

定理 3.7 证毕.

定理 3.8　如果矩阵 A 的列是线性无关的，则

$$A^+ = (A^* A)^{-1} A^*.$$

证明：由于 $A = AI$,(I 为适当阶的单位矩阵), 由 (3.6) 得

$$A^+ = I^*(II^*)^{-1}(A^* A)^{-1} A^* = (A^* A)^{-1} A^*,$$

定理 3.8 证毕.

同理可证

定理 3.9　如果矩阵 A 的行是线性无关的，则

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}.$$

最后，我们来讨论德拉辛逆阵.

定义 3.4　设 E 为一个方阵，如果存在一个矩阵 E^d 满足

1^0　$EE^d = E^d E$,

2^0　$E^d E E^d = E^d$,

3^0　$(I-E^dE)E^l=0$.

则称 E^d 为矩阵 E 的德拉辛逆阵，简称为 D- 逆阵. 其中 l 是矩阵 E 的指标，亦即使得 $rankE^{l+1}=rankE^l$ 成立的最小非负整数.

定理 3.10　任意一个方阵 E 的 D- 逆阵都存在，唯一，而且如果 E 的 Jordan 标准形为

$$E=N\begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}N^{-1}.$$

其中 J_0 为一个幂零矩阵， J_1 为一个非异矩阵，则有

$$E^d=N\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_1^{-1} \end{pmatrix}N^{-1}.$$

证明：容易验证定义 3.4 的三个条件满足，而且 l 为幂零矩阵 J_0 的指数. 只需证明唯一性即可.

设 E_1^d 和 E_2^d 都是 E 的 D- 逆阵，并设 $R=E_1^d-E_2^d$, 则由定义 3.4 中的 1^0 和 3^0 有 $RE=ER$,

$$\begin{aligned} RE^{l+1} &= (E_1^d-E_2^d)E^{l+1} \\ &= E_1^dE^{l+1}-E_2^dE^{l+1} \\ &= E^l-E^l=0. \end{aligned}$$

由定义 3.4 中的 2^0 有

$$\begin{aligned} (EE_1^d)^{l+1} &= EE_1^dEE_1^d(EE_1^d)^{l-1} \\ &= EE_1^d(EE_1^d)^{l-1}=(EE_1^d)^l \\ &= \cdots = EE_1^d. \end{aligned}$$

类似地可证

$$(EE_2^d)^{l+1}=EE_2^d.$$

这样我们有

$$
\begin{aligned}
E_1^d &= E_1^d E_1 E_1^d = (E_1^d - E_2^d) E E_1^d \\
&\quad + E_2^d E (E_1^d - E_2^d) + E_2^d \\
&= R E E_1^d + E E_2^d R + E_2^d \\
&= R E^{l+1} (E_1^d)^{l+1} \\
&\quad + (E_2^d)^{l+1} E^{l+1} R + E_2^d = E_2^d.
\end{aligned}
$$

定理 3.10 证毕.

定理 3.11 如果矩阵 N 非奇异，而且

$$A = NBN^{-1}$$

则

$$A^d = NB^d N^{-1}.$$

证明:

$$
\begin{aligned}
AA^d &= NBN^{-1}NB^dN^{-1} = NBB^dN^{-1} \\
&= NB^dBN^{-1} = NB^dN^{-1}NBN^{-1} \\
&= A^dA \\
A^dAA^d &= NB^dN^{-1}NBN^{-1}NB^dN^{-1} \\
&= NB^dBB^dN^{-1} = NB^dN^{-1} \\
&= A^d
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(I - A^dA)A^l = (I - NB^dN^{-1}NBN^{-1})NB^lN^{-1} \\
\times N((I - B^dB)B^l)N^{-1} = N0N^{-1} = 0
\end{aligned}
$$

故

$$A^d = NB^dN^{-1}.$$

定理 3.11 证毕.

第二章 退化时滞微分系统

本章我们首先给出退化、时滞微分系统的基本概念，并对其进行分类. 然后，在第二节中讨论退化滞后微分系统的可解性问题. 最后在第三节中就退化滞后控制系统的输出反馈正常化问题，给出相应结果.

§2.1 时滞微分系统及其分类

我们考虑如下形式的系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = f(\dot{x}(t-\tau), x(t), x(t-\tau), t), \\ \qquad\qquad t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \qquad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x(t) \in R^n, f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) \in R^m, E \in R^{m\times n}, \tau \in R^+$ 为时滞. $\varphi(t)$ 为可容的初始函数.

如果 m=n, 则 E 为方阵, 如果 $|E| \neq 0$, 即矩阵 E 为可逆的, 则 (1.1) 可化为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = E^{-1}f(\dot{x}(t-\tau), x(t), x(t-\tau), t), \\ \qquad\qquad t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \qquad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

这时我们称系统 (1.2) 从而称 (1.1) 为正常时滞微分系统.

当 f 中不含 $\dot{x}(t-\tau)$ 时, 则系统 (1.2) 为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = E^{-1}f(x(t), x(t-\tau), t), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

称 (1.3) 为正常滞后微系统, 简称为滞后微分系统.

当 f 中含有 $\dot{x}(t-\tau)$ 时, 称系统 (1.2) 称为正常中立型微分系统, 简称为中立型微分系统.

对于系统 (1.1) 如果 $m \neq n$, 或 $m = n$ 而且 $|E| = 0$, 则当 f 中不含 $\dot{x}(t-\tau)$ 时, 系统为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau), t), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

称之为退化滞后微分系统.

当 f 中包含 $\dot{x}(t-\tau)$ 时, 称系统 (1.1) 为退化中立型微分系统.

一般地, 我们将系统 (1.1) 通称为退化、时滞微分系统, 或广义时滞微分系统.

系统 (1.1) 的线性系统为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) + C\dot{x}(t-1) = Ax(t) + Bx(t-1) + f(t), \\ \qquad\qquad t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \qquad t_0 - 1 \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $E, A, B, C \in R^{m\times n}$, 均为常数矩阵， $f(t) \in R^m$ 为已知函数. 我们一般地称之为线性退化、时滞微分系统，或广义线性时滞微分系统.

系统 (1.5) 中，如果 m=n, 则 E 为方阵，如果 $|E| \neq 0$, 即矩阵 E 为可逆的，即可得到相应于系统 (1.2) 的线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + C\dot{x}(t-1) = Ax(t) + Bx(t-1) + f(t), \\ \qquad\qquad t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \qquad t_0 - 1 \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

如果矩阵 C 为非零矩阵，我们称之为线性中立型微分系统.

如果系统 (1.6) 中 C 为零矩阵，我们就有对应于系统 (1.3) 的线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + f(t), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - 1 \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

我们称之为线性滞后微分系统.

如果系统 (1.5) 中 $m \neq n$, 或 $m = n$ 而 $|E| = 0$, 当矩阵 C 为零矩阵时，系统为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + f(t), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - 1 \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

我们称之为线性退化滞后微分系统. 在不至混淆的情况下，有时也称之为退化时滞微分系统.

如果系统 (1.5) 中 $m \neq n$, 或 $m = n$ 而 $|E| = 0$, 且矩阵 C 为非零矩阵，则称之为线性退化中立型微分系统.

如果在系统 (1.8) 中， $f(t) = Cu(t)$, 这里 $u(t) \in R^r$ 是控制变

量， $C \in R^{n\times r}$ 也为常数矩阵，则有系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + Cu(t), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - 1 \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{1.9}$$

我们称之为退化、时滞微分控制系统.

设 $D \in R^{n\times n}$ 则称形如

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) + D\dot{x}(t-1) = Ax(t) + Bx(t-1) + Cu(t), \\ \qquad\qquad t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \qquad t_0 - 1 \leq t \leq t_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

的系统为退化中立型控制系统.

依照以上的方法，可以定义退化滞后控制系统、滞后控制系统、中立型控制系统等.

定义 1.1 对于 $n \times n$ 矩阵 A 和 E, 如果存在某些标量值 λ 使得 $\lambda E + A$ 为满秩矩阵，即 $\lambda E + A$ 为正则的矩阵束，或矩阵对 (E,A) 为正则的，则相应的系统 (1.5), (1.8),(1.9),(1.10) 均称为正则系统.

由第一章我们不难证明，如果 (E,A) 为正则的，我们可以通过变换，将退化时滞微分系统 (1.8) 化为与其等价的标准形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_{11}x_1(t-\tau) \\ \qquad + B_{12}x_2(t-\tau) + f_1(t), \\ \qquad t \geq 0, \\ N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_{21}x_1(t-\tau) \\ \qquad + B_{22}x_2(t-\tau) + f_2(t), \\ \qquad t \geq 0, \\ x_1(t) = \varphi_1(t), \qquad -\tau \leq t \leq 0, \\ x_2(t) = \varphi_2(t), \qquad -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

其中 $x_1(t),f_1(t),\varphi_1 \in R^{n_1};x_2(t),f_2(t),\varphi_2 \in R^{n_2}$; $A_1,B_{11} \in R^{n_1\times n_1}$; N,$B_{22} \in R^{n_2\times n_2}$; $B_{12} \in R^{n_1\times n_2}$, $B_{21} \in R^{n_2\times n_1}$; $n_1+n_2=n$;N 为幂零矩阵，而且 $h=ind(N)=ind(E)$.

§2.2 退化滞后线性微分系统的可解性

我们在讨论退化时滞微分系统时，首先要面临的问题是所要讨论的系统的解是否存在. 事实上，有大量的退化时滞微分系统的解是不存在的，即使是线性退化时滞微分系统，其解都有可能不存在.

例如系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_1(t-1) \\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)+x_2(t-1) \\ 0=x_2(t)-x_2(t-1)-1 \end{cases}$$

的解总是不存在的. 其实，由第三个方程，我们有 $x_2(t)=t$, 将其代入前两个方程，则得到两个矛盾方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_1(t-1) \\ x_1(t)=1-t. \end{cases}$$

因此，很有必要对退化时滞微分系统的可解性作深入讨论.

考虑退化滞后微分系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-1)+f(t), & t\geq t_0, \\ x(t)=\varphi(t), & t_0-1\leq t\leq t_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 为状态变量， $f(t)\in R^m;E,A,B\in R^{m\times n}$ 均为常量矩阵. $\varphi(t)$ 为可容的初始函数.

本节我们将给出其标准形式，并就其标准形式得到其可解性及解的唯一性的一些结果.

由第一章可得:

引理 2.1 对 $m\times n$ 异矩阵束 $\lambda E-A$, 存在非奇异矩阵 $P\in R^{m\times m}$ 和 $Q\in R^{n\times n}$, 使得 $P(\lambda E-A)Q$ 为标准形式

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & L_{\varepsilon_1}(\lambda) & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & L_{\varepsilon_p}(\lambda) & & & & \\ & & & & L'_{\eta_1}(\lambda) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & L'_{\eta_q}(\lambda) & \\ & & & & & & & \lambda E_0-A_0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

其中 $0\in R^{h\times g}$ 为零矩阵;

$$L_{\varepsilon_i}(\lambda)\in R^{\varepsilon_i\times(\varepsilon_i+1)},(i=1,2,\cdots,p),$$

其形式为

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \end{pmatrix}_{\varepsilon_i\times(\varepsilon_i+1)}, \quad (i=1,2,\cdots,p),$$

而 $L'_{\eta_j}(\lambda)\in R^{(\eta_j+1)\times\eta_j},(j=1,2,\cdots,q)$, 其形式为

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\eta_j+1)\times\eta_j}, \quad (j=1,2,\cdots,q),$$

$\lambda E_0-A_0\in R^{s\times s}$, 为一个正则束. 这里

$$h+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_p+(\eta_1+1)+(\eta_2+1)+\cdots+(\eta_q+1)+s=m;$$

$$g+(\varepsilon_1+1)+(\varepsilon_2+1)+\cdots+(\varepsilon_p+1)+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+s=n.$$

对于系统 (2.1), 由引理 2.1, 存在非奇异矩阵 $P\in R^{m\times m}$ 和 $Q\in R^{n\times n}$, 使得系统 (2.1) 左乘 P, 并令 $x(t)=Qz(t)$, 可将其化为标准形式

$$\begin{cases} O\overset{1}{z}(t)=\overset{1}{B}z(t-1)+\overset{1}{f}, \\ L_{\varepsilon_i}(\frac{d}{dt})\overset{i+1}{z}(t)=\overset{i+1}{B}z(t-1)+\overset{i+1}{f}(t) \\ \qquad (i=1,2,\cdots,p), \\ L'_{\eta_j}(\frac{d}{dt})\overset{p+1+j}{z}(t)=\overset{p+1+j}{B}z(t-1)+\overset{p+1+j}{f}(t) \\ \qquad (j=1,2,\cdots,q), \\ E_0\frac{d}{dt}(\overset{p+q+2}{z}(t))=A_0\overset{p+q+2}{z}(t)+ \\ \qquad \overset{p+q+2}{B}z(t-1)+\overset{p+q+2}{f}(t), \end{cases} \tag{2.3}$$

其中

$$z(t)=\begin{pmatrix}\overset{1}{z}(t)\\ \overset{2}{z}(t)\\ \vdots\\ \overset{p+q+2}{z}(t)\end{pmatrix},\quad \overset{1}{z}(t)=\begin{pmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\\ \vdots\\ z_g(t)\end{pmatrix},$$

$$\overset{2}{z}(t)=\begin{pmatrix}z_{g+1}(t)\\ z_{g+2}(t)\\ \vdots\\ z_{g+\varepsilon_1}(t)\end{pmatrix},\quad \cdots.$$

首先，对只有形如 (2.3) 中第一个方程的标准方程的系统，它们可以化为

$$O=B_1z(t-1)+f_1(t), \tag{2.4}$$

我们有

定理 2.1　如果 $z(t-1)$ 为已知，且满足方程 (2.4), 则 $z(t)$ 可以任意取值，即方程 (2.4) 有无穷多组解.

但是我们注意到，虽然在时刻 t 的值 $z(t)$ 在 $z(t-1)$ 已知并满足 (2.4) 时可以任意取值，但要求 $t+1$ 时刻的 $z(t+1)$ 时， $z(t)$ 就必需满足限制条件

$$O=B_1z(t)+f_1(t+1).$$

可见要使系统对所有的 t 都有解，必须对 B_1 和 $f_1(t)$ 加以限制.

对只有形如 (2.3) 中第二个方程的标准方程的系统，我们有

$$L_\varepsilon(\frac{d}{dt})z(t)=B_2z(t-1)+f_2(t)$$

或更详细地写为

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} + z_2(t) = B_2^1 z(t-1) + f_2^1(t), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} + z_3(t) = B_2^2 z(t-1) + f_2^2(t), \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \frac{dz_\varepsilon(t)}{dt} + z_{\varepsilon+1}(t) = B_2^\varepsilon z(t-1) + f_2^\varepsilon(t). \end{cases} \tag{2.5}$$

在这类系统中，用分步法可得，是永远可解的. 即一旦 $z(t-1)$ 已知，对任一 t 的函数作为 $z_{\varepsilon+1}(t)$，都由 (2.5) 自下而上依次求出其余的未知函数

$$z_\varepsilon(t), z_{\varepsilon-1}(t), \cdots, z_1(t).$$

显然我们有

定理 2.2　可化为系统 (2.5) 的系统总是可解的，但其解不是唯一的.

对只有形如 (2.3) 中第三个方程的标准方程的退化时滞微分系统，我们有

$$L'_\eta(\frac{d}{dt})z(t) = B_3 z(t-1) + f_3(t)$$

或更详细地写为

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = B_3^1 z(t-1) + f_3^1(t), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} + z_1(t) = B_3^2 z(t-1) + f_3^2(t), \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \frac{dz_\eta(t)}{dt} + z_{\eta-1}(t) = B_3^\eta z(t-1) + f_3^\eta(t), \\ z_\eta(t) = B_3^{\eta+1} z(t-1) + f_3^{\eta+1}(t). \end{cases} \tag{2.6}$$

由分步法，一旦 $z(t-1)$ 已知，我们就有

$$
\begin{aligned}
z_\eta(t) \quad &= B_3^{\eta+1}z(t-1)+f_3^{\eta+1}(t),\\
z_{\eta-1}(t) \quad &= B_3^{\eta}z(t-1)+f_3^{\eta}(t)-B_3^{\eta+1}\tfrac{d}{dt}z(t-1)-\tfrac{d}{dt}f_3^{\eta+1}(t),\\
&\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\
z_1(t) \quad &= B_3^2z(t-1)-B_3^3\tfrac{d}{dt}z(t-1)+\cdots\\
&+(-1)^{\eta-1}B_3^{\eta+1}\tfrac{d^{\eta-1}}{dt^{\eta-1}}z(t-1)\\
&+f_3^2(t)-\tfrac{d}{dt}(f_3^2(t))+\cdots\\
&+(-1)^{\eta-1}\tfrac{d^{\eta-1}}{dt^{\eta-1}}(f_3^{\eta+1}(t)).
\end{aligned}
$$

将 $z_1(t)$ 代入第一个方程，我们可以得出相容性条件

$$
\begin{aligned}
&B_3^1z(t-1)-B_3^2\tfrac{d}{dt}z(t-1)+B_3^3\tfrac{d^2}{dt^2}z(t-1)+\cdots\\
&\quad+(-1)^{\eta}B_3^{\eta+1}\tfrac{d^{\eta}}{dt^{\eta}}z(t-1)+f_3^1(t)-\tfrac{d}{dt}f_3^2(t)+\cdots\\
&\quad+(-1)^{\eta}\tfrac{d^{\eta}}{dt^{\eta}}(f_3^{\eta+1}(t))=0.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

因而我们有

定理 2.3　可化为系统 (2.6) 的退化滞后微分系统在时刻 t 的解 $z(t)$ 存在唯一的充要条件为 $z(t-1)$ 存在且满足 (2.7).

当然, 对系统 (2.6), 其初始函数 $z(t)=\varphi(t),(t\in[t_0-1,t_0])$, 也必须满足条件 (2.7). 只有当 $z(t-1)$ 满足条件 (2.7),$z(t)$ 才存在. 一旦有一个时刻 t 使 $z(t-1)$ 不满足 (2.7),$z(t)$ 就不存在，因而一般说来这个条件非常强.

对只有形如 (2.3) 中第四个方程的标准方程的系统，可化为

$$
\begin{cases}
E_0\dot z(t)=A_0z(t)+B_0z(t-1)+f_0(t),\\
\qquad\qquad t\ge t_0,\\
z(t)=\varphi(t), \qquad\qquad t_0-1\le t\le t_0,
\end{cases}
\tag{2.8}
$$

其中 (E_0, A_0) 为正则的.

由文献 [5] 我们有

引理 2.2　系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq t_0, \\ x(t_0) = \varphi(t_0), \end{cases}$$

的解存在唯一的充要条件为 (E,A) 为正则的.

这样我们给出

定理 2.4　可化为系统 (2.8) 的退化滞后微分系统在时刻 t 的解 $z(t)$ 存在且为唯一的.

证明：在 (2.8) 中，当 $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$ 时，$z(t) = \varphi(t)$. 这样，当 $t_0 \leq t \leq t_0 + 1$ 时，系统 (2.8) 即为

$$E_0\dot{z}(t) = A_0z(t) + B_0\varphi(t-1) + f_0(t),$$

由 (E_0, A_0) 为正则的且 $B_0\varphi(t-1) + f_0(t)$ 是给定函数，故由引理 2.2, 当 $t_0 \leq t \leq t_0 + 1$ 时，系统 (2.8) 的解存在且唯一.

当 $t \in [t_0 + 1, t_0 + 2]$ 时，退化滞后系统 (2.8) 为

$$E_0\dot{z}(t) = A_0z(t) + B_0z(t-1) + f_0(t),$$

由 (E_0, A_0) 为正则的且 $z(t-1)$ 为 (2.8) 在 $[t_0, t_0 + 1]$ 内已可解出的函数，即 $B_0z(t-1) + f_0(t)$ 为已知函数，由引理 2.2 得退化滞后微分系统 (2.8) 在 $[t_0 + 1, t_0 + 2]$ 上可解，且其解唯一.

如果退化滞后微分系统 (2.8) 在 $[t_0 + k - 1, t_0 + k]$ 上可解，则当 $t \in [t_0 + k, t_0 + k + 1]$ 时，系统为

$$E_0\dot{z}(t) = A_0z(t) + B_0z(t-1) + f_0(t),$$

由 (E_0, A_0) 为正则的，且 $z(t-1)$ 为 (2.8) 在 $[t_0 + k - 1, t_0 + k]$ 内已可解出的函数，即 $B_0z(t-1) + f_0(t)$ 为已知函数，由引理 2.2 得退化滞后微分系统 (2.8) 在 $[t_0 + k, t_0 + k + 1]$ 上可解且其解唯一.

由归纳法可知系统 (2.8) 的解存在且唯一. 定理证毕.

由定理 2.4 的证明立即得

定理 2.5 如果 (E,A) 为正则的, 则退化时滞微分系统 (2.1) 的解存在且唯一.

由定理 2.1— 定理 2.4 可得

定理 2.6 退化时滞微分系统 (2.1) 的解存在且唯一的充要条件为, 其只有 (2.3) 中第三个方程和第四个方程类型的标准形式, 且当有第三个方程类型的标准形式时, 应满足相应的相容条件.

注 2.1 由上面的讨论可见, 要退化滞后微分方程的解存在且唯一, 其只有 (2.3) 中第三个方程和第四个方程类型的标准形式. 而具有第三个方程类型的标准形式时, 系统必须满足一个较强的相容性条件. 因而正则系统是其解存在唯一的滞后退化系统中最为典型的一类, 也就是最有意义的一类. 因而下面主要对这类系统作深入地讨论.

注 2.2 对退化中立型微分系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) + D\dot{x}(t-1) = Ax(t) + Bx(t-1) + Cu(t), \\ \qquad\qquad\qquad t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \qquad t_0 - 1 \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

可以类似地讨论其可解性. 特别地, 我们可有结论: 当 (E,A) 正则时, 退化中立型微分系统 (2.9) 的解存在且唯一.

§2.3 退化时滞控制系统的输出反馈正常化

解决退化控制系统基本问题的一个重要途径就是探索在什么条件下能够转化, 以及如何转化为正常系统.

文献 [32] 讨论了不含时滞的退化系统的状态反馈正常化的问题, 得出了相应的充要条件. 本节对退化滞后系统给出能够输出反馈正常化的充要条件, 并给出其正常化的方法. 在系统本身和反馈性质两个方面大大地推广了文献 [32] 的有关结果.

本节考虑的系统为退化时滞控制系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + Cu(t), & t \in [t_0, T], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - 1, t_0], \end{cases} \tag{3.1}$$

其输出方程为

$$y(t) = Dx(t), \tag{3.2}$$

这里 $x(t) \in R^n$ 是状态变量, $u(t) \in R^r$ 是控制变量, $y(t) \in R^m$ 为输出变量; $E \in R^{n\times n}$ 为奇异矩阵, $A, B \in R^{n\times n}, C \in R^{n\times r}, D \in R^{m\times n}$, 且 A,B,C,D 皆为常数矩阵.

在实际系统中, 形如 (3.1) 和 (3.2) 的系统是普遍存在的.

例 3.1　在引言中的例 1.1 中, 关于两种产品的库存量 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ 和该两种产品的生产率

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$$

之间的关系可表示为

$$(I_2 + E_1)\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + u(t), \tag{3.3}$$

其中 $I_2 \in R^{2\times 2}$ 为二阶的单位矩阵.

如果 $|I_2 + E_1| = 0$, 则该系统即为退化时滞系统. 如设 $y(t)$ 为库存的总费用, a 为 $x_1(t)$ 的单位存量的费用, b 为 $x_2(t)$ 的单位存量的费用, 则该系统的输出方程为

$$y(t) = ax_1(t) + bx_2(t) = (a, b)x(t).$$

由本例可见，研究退化时滞控制系统 (3.1)(3.2) 的反馈正常化问题，不仅具有重要的理论意义，而且具有普遍的实用价值.

对于退化时滞控制系统 (3.1)(3.2), 设输出反馈控制为

$$u(t) = Hy(t) - K\dot{y}(t) + v(t), \tag{3.4}$$

其中 $K, H \in R^{r\times m}$ 为常数矩阵， $v(t) \in R^r$ 为新的控制变量.

将 (3.4) 代入 (3.1) 得

$$\begin{cases} (E+CKD)\dot{x}(t) = (A+HD)x(t) + Bx(t-1) + Cv(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t \in [t_0, T], \\ x(t) = \varphi(t), \qquad\quad t \in [t_0 - 1, t_0], \end{cases} \tag{3.5}$$

从 (3.5) 易见，如果存在 $K \in R^{r\times m}$ 使得

$$det(E+CKD) \neq 0,$$

则系统 (3.5) 就为正常系统了. 这样系统 (3.1)(3.2) 就通过输出反馈 (3.4) 正常化了.

定义 3.1 如果存在常数矩阵 $K \in R^{r\times m}$ 使得 $det(E+CKD) \neq 0$, 则称退化时滞控制系统 (3.1), 能够输出反馈正常化.

由此，我们给出本节的主要结果

定理 3.1 退化时滞控制系统 (3.1),(3.2) 能够输出反馈正常化的充分必要条件是

$$rank[E, C] = rank \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} = n. \tag{3.6}$$

证明：由

$$E + CKD = [E, C] \begin{bmatrix} I \\ KD \end{bmatrix} = [I, CK] \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix}$$

可得，对于任何 $K \in R^{r\times m}$ 都有

$$\begin{cases} rank(E+CKD) \le rank(E,C), \\ rank(E+CKD) \le rank\begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{3.7}$$

如果存在 $K \in R^{r\times m}$ 使得 $det(E+CKD) \neq 0$, 则 $rank(E+CKD) = n$.

由 (3.7) 得

$$\begin{cases} rank(E,C) \ge n, \\ rank\begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} \ge n. \end{cases}$$

又因为 $[E,C]$ 为 n 行的矩阵, $\begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix}$ 为 n 列的矩阵，有

$$\begin{cases} rank(E,C) \le n, \\ rank\begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} \le n. \end{cases}$$

故有 $rank[E,C] = n, rank\begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} = n$, 即 (3.6) 成立.

反之，如果 (3.6) 成立，设 $rank(E) = n_0$, 显然 $n_0 < n$, 设 $n_1 = n - n_0$, 则由 (3.6) 得

$$\begin{cases} rank(E,C) = n_0 + n_1 \\ rank\begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix} = n_0 + n_1 \end{cases}$$

则存在非奇异方阵 $P_1 \in R^{n\times n}, Q_1 \in r\times r$ 使得

$$P_1[E,C]\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & C_{11} & 0 \\ 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

且存在非奇异方阵 $P_2 \in R^{m\times m}, Q_1 \in R^{n\times n}$ 使得

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ D \end{bmatrix} Q_2 = \begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

式 (3.8).(3.9) 中, $I \in R^{n\times n}$ 为单位矩阵, $E_1 \in R^{n_0\times n}$, $E_2 \in R^{n_0\times n_0}$, $C_{22} \in R^{n_1\times n_1}$, $D_{22} \in R^{n_1\times n_1}$; 且 $det[E_2] \neq 0$, $det[C_{22}] \neq 0$, $det[D_{22}] \neq 0$.

设

$$K = Q_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^{-1}K_1D_{22}^{-1} \end{bmatrix} P_2, \tag{3.10}$$

其中 $K_1 \in R^{n_1\times n_1}$, 这时

$$P_1[E+CKD]Q_2 = \begin{bmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1 \end{bmatrix}.$$

如果取 K_1 为满滞的，则有

$$rank[E+CKD] = n_0 + n_1 = n,$$

定理证毕.

我们知道，退化时滞控制系 (3.1)(3.2) 的输出反馈正常化问题，就是要求一个矩阵 $K \in R^{r\times m}$ 使得 $det[E+CKD] \neq 0$. 因而

如果退化时滞控制系统 (3.1)(3.2) 满足条件 (3.6), 我们就可以给出其输出反馈正常化的方法. 其具体的求解步骤为

第一步　对矩阵 [E,C] 作行变换, 并求一个非奇异矩阵 $Q_1 \in R^{r\times r}$, 使 [E,C] 经行变换和右乘矩阵 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}$ 后化为

$$\begin{bmatrix} E_1 & C_{11} & 0 \\ 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

其中 $E_1 \in R^{n_0\times n}$, $C_{22} \in R^{n_1\times n_1}$, 且 $det[C_{22}] \neq 0$.

第二步　对矩阵 $\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ D \end{bmatrix}$ 作列变换, 并求一个非奇异矩阵 $P_2 \in R^{m\times n}$, 使 $\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ D \end{bmatrix}$ 经列变换和左乘矩阵 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ 后化为 $\begin{bmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}$

其中 $E_2 \in R^{n_0\times n_0}$, $det[E_2] \neq 0$, $D_{22} \in R^{n_1\times n_1}$, 且 $det[D_{22}] \neq 0$.

第三步　任取一个非奇异矩阵 $K_1 \in R^{n_1\times n_1}$, 从而求得反馈矩阵

$$K = Q_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^{-1}K_1D_{22}^{-1} \end{bmatrix} P_2$$

第四步　将反馈矩阵 K 代入 (3.4), 并任取 $H \in R^{n_1\times m}$, 从而

求得输出反馈控制.

第五步　将所得的输出反馈控制和输出方程 (3.2) 代入退化时滞控制系统 (3.1), 即可将其化为正常时滞控制系统.

例 3.2　对于退化时滞控制系统

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \tag{3.11}$$

其输出方程为

$$y(t) = (1,1)x(t), \tag{3.12}$$

其中

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

对照系统 (3.1) 和输出方程 (3.2) 可见

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D = (1,1).$$

由于 $rank(E,C) = rank\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, rank\begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix}$

$$= rank\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

由定理 3.1 可得，系统 (3.11) 和 (3.12) 为能够输出反馈正常化的.

由输出反馈正常化的方法，我们有

对 $(E,C)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 作行变换化为 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

取 $Q_1=(1)$, 则 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\0&Q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

对 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$ 作列变换化为 $\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$, 取 $P_2=(1)$, 则 $K=Q_1(C_{22}^{-1}K_1D_{22}^{-1})P_2=(1)$. 故求得输出反馈控制为

$$u(t)=-\dot{y}(t)+hy(t)+v(t),$$

其中 h 为任意常数， $v(t)$ 为新的控制变量.

这样系统 (3.11) 即可化为正常时滞控制系统

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+h&h\\h&1+h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t-1)\\x_2(t-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}v(t),$$

或者写成

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h-1&h+2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t-1)\\x_2(t-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}v(t).$$

第三章　退化时滞系统的解

本章的主要内容分四节叙述，我们给出退化时滞微分系统的指数估计，并就退化滞后微分系统、退化中立型微分系统和退化时滞差分系统，分别给出解的表达形式.

§3.1　退化时滞微分系统解的指数估计

众所周知，解的指数估计在系统的基本理论中占有非常重要的地位. 例如对一类方程是否可以取 Laplace 变换，从而求解或讨论解的性质，必须在其解具有指数估计的前提下进行. 因而许多论著都要花大量的笔墨来讨论系统解的指数估计. 如文献 [1][2]，均就时滞微分系统的指数估计作了大量的研究.

本节就退化的时滞微分系统，讨论其解的指数估计问题，并给出其表达形式.

考虑系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(t) & t \geq 0 \\ x(t) = \varphi(t) & -\tau \leq t \leq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 E,A,$B \in R^{n\times n}$,$|E|=0$;$x(t)$, $f(t)$,$\varphi(t) \in R^n$.

类似文献 [8] 的证明，我们可得

引理 1.1　如果 (E,A) 正则，则可通过变换将系统 (1.1) 化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_{11}x_1(t-\tau) \\ \qquad\qquad +B_{12}x_2(t-\tau) + f_1(t), \\ \qquad\qquad t \geq 0, \\ N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_{21}x_1(t-\tau) \\ \qquad\qquad +B_{22}x_2(t-\tau) + f_2(t), \\ \qquad\qquad t \geq 0, \\ x_1(t) = \varphi_1(t), \qquad -\tau \leq t \leq 0, \\ x_2(t) = \varphi_2(t), \qquad -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $x_1(t)$,$f_1(t)$,$\varphi_1 \in R^{n_1}$;$x_2(t)$,$f_2(t)$,$\varphi_2 \in R^{n_2}$; $n_1+n_2=n$; A_1,$B_{11} \in R^{n_1\times n_1}$; N,$B_{22} \in R^{n_2\times n_2}$;$B_{12} \in R^{n_1\times n_2}$, $B_{21} \in R^{n_2\times n_1}$; N 为幂零矩阵，设 $h=ind(N)=ind(E)$.

不妨仍设

$$x(t) = ({x_1}'(t), {x_2}'(t))', \varphi(t) = ({\varphi_1}'(t), {\varphi_2}'(t))',$$

这里 “′” 表示矩阵的转置.

设 D 为微分算子，并设 $T=(ND-I)^{-1}$, 不难验证

$$T = -(I + ND + N^2D^2 + \cdots + N^{h-1}D^{h-1}),$$

其中 $I \in R^{n_2\times n_2}$ 为单位矩阵.

定理 1.1　算子 $T=(ND-I)^{-1}$ 为有界算子，即存在正的常数 M 使得对任何 $x_2(t)$ 有

$$|Tx_2(t)| \leq M|x_2(t)|$$

证明：显然算子 T 为线性子，因此只需证明其为连续算子即可. 只需证明其在 0 连续即可. 设 $x_n(t) \to 0$, 且 $y_n(t) = Tx_n(t)$. 令 $y_n(t) \to y_0(t)$, 证明 $y_0 = 0$ 即可.

由 $y_n(t) = Tx_n(t) = (ND - I)^{-1}x_n(t)$ 得

$$(ND - I)Y_n(t) = x_n(t),$$

则

$$(ND - I)y_0(t) = 0 \Rightarrow N\dot{y}_0(t) = y_0(t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 0 &= N^h y_0^{(h)}(t) = N^{h-1}(N\dot{y}_0(t))^{(h-1)} = N^{(h-1)}y_0^{(h-1)} \\ &= \cdots = N\dot{y}_0(t) = y_0(t). \end{aligned}$$

即 $y_0(t) = 0$. 定理 1.1 证毕.

由文献 [1] 我们有

引理 1.2 (Gronwall 引理) 若 u(t) 与 $\alpha(t)$ 都是 [a,b] 上连续的实函数， $\beta(t) \geq 0$, 在 [a,b] 上可积， $\alpha(t)$ 非减，且有

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds \qquad t \in [a,b],$$

则必有

$$u(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}.$$

||

由 (1.2) 中第一个方程有

$$\begin{aligned} x_1(t) = \ & \varphi_1(0) + \int_0^t A_1x_1(s)ds + \int_0^t B_{11}x_1(s-\tau)ds \\ & + B_{12}\int_0^t x_2(s-\tau)ds + \int_0^t f_1(s)ds. \end{aligned}$$

令 $||\varphi|| = \sup\limits_{\theta\in[-\tau,0]} |\varphi(\theta)|$, 则

$$\begin{aligned} |x_1(t)| \quad & \leq |\varphi_1(0)| + \int_0^t |f_1(s)|ds + \int_0^t ||A_1|||x_1(s)|ds \\ & + \int_{-\tau}^t ||B_{11}|||x_1(s)|ds + \int_{-\tau}^t ||B_{12}|||x_2(s)|ds \\ & \leq ||\varphi|| + \int_0^t |f_1(s)|ds \\ & + \int_0^t (||A_1|| + ||B_{11}|| + ||B_{12}||)|x(s)|ds \\ & +(||B_{11}|| + ||B_{12}||)\tau||\varphi|| \\ & = (1 + ||B_{11}||\tau + ||B_{12}||\tau)||\varphi|| + \int_0^t |f_1(s)|ds \\ & + \int_0^t (||A_1|| + ||B_{11}|| + ||B_{12}||)|x(s)|ds, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} |x_1(t)| \quad & \leq (1 + ||B_{11}||\tau + ||B_{12}||\tau)||\varphi|| + \int_0^t |f_1(s)|ds \\ & + \int_0^t (||A_1|| + ||B_{11}|| + ||B_{12}||)|x(s)|ds. \end{aligned} \tag{1.3}$$

由 (1.2) 中第二个方程有

$$(ND - I)x_2(t) = B_{21}x_1(t-\tau) + B_{22}x_2(t-\tau) + f_2(t),$$

从而有

$$\begin{aligned} |x_2(t)| \quad & = (ND - I)^{-1}B_{21}x_1(t-\tau) \\ & \quad +(ND - I)^{-1}B_{22}x_2(t-\tau) + (ND - I)^{-1}f_2(t) \\ & = T(B_{21}x_1(t-\tau)) + T(B_{22}x_2(t-\tau)) + Tf_2(t), \end{aligned}$$

故我们得

$$\begin{aligned} |x_2(t)| \quad & \leq M||B_{21}|||x_1(t-\tau)| \\ & \quad +M||B_{22}|||x_2(t-\tau)| + M|f_2(t)| \\ & \leq M(||B_{21}|| + ||B_{22}||)|x(t-\tau)| + M|f_2(t)|, \end{aligned} \tag{1.4}$$

由 (1.3),(1.4) 得

$$\begin{aligned}|x_1(t)|+|x_2(t)| &\le (1+||B_{11}||\tau+||B_{12}||\tau)||\varphi||+\int_0^t|f_1(s)|ds\\&+M(||B_{21}||+||B_{22}||)|x(t-\tau)|\\&+M|f_2(t)|+(||A_1||+||B_{11}||\\&+||B_{12}||)\int_0^t|x(s)|ds,\end{aligned}$$

令

$$a_0=1+||B_{11}||\tau+||B_{12}||\tau,$$
$$a_1=M(||B_{21}||+||B_{22}||),$$
$$a_2=||A_1||+||B_{11}||+||B_{12}||.$$

由 $|x(t)|\le|x_1(t)|+|x_2(t)|$ 得

$$\begin{aligned}|x(t)| &\le a_0||\varphi||+\int_0^t|f_1(s)|ds+a_1|x(t-\tau)|\\&+M|f_2(t)|+a_2\int_0^t|x(s)|ds.\end{aligned}\tag{1.5}$$

令

$$a=a_0+a_1=1+||B_{11}||\tau+||B_{12}||\tau+M(||B_{21}||+||B_{22}||),$$

则当 $t\in[0,\frac{\tau}{2}]$ 时，由 (1.5) 得

$$|x(t)|\le a||\varphi||+\int_0^t|f_1(s)|ds+M|f_2(t)|+a_2\int_0^t|x(s)|ds,$$

令

$$F_2(t)=\sup_{0\le t_1\le t}|f_2(t_1)|,$$

显然 $F_2(t)$ 非减. 定义

$$y(t)=\sup_{\theta\in[-\tau,0]}|x(t+\theta)|,\qquad t\in[0,\frac{\tau}{2}].$$

则有

$$|x(t)| \le y(t) \le a\|\varphi\| + \int_0^t |f_1(s)|ds + M|F_2(t)| + a_2\int_0^t |y(s)|ds,$$

由引理 1.2 得

$$y(t) \le (a\|\varphi\| + \int_0^t |f_1(s)|ds + M|F_2(t)|)e^{a_2 t}, \quad t \in [0, \tfrac{\tau}{2}], \tag{1.6}$$

类似地可有估计式

$$y(t) \le (ay(t_0) + \int_{t_0}^t |f_1(s)|ds + M|F_2(t)|)e^{a_2(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, t_0 + \tfrac{\tau}{2}], \tag{1.7}$$

选取 $b > a_2$, 使得 $ae^{(a_2-b)\frac{\tau}{2}} < 1$. 下面用数学归纳法证明

$$y(t) \le (a\|\varphi\| + \int_0^t |f_1(s)|ds + \tfrac{2}{\tau}(t + \tfrac{\tau}{2})MF_2(t))e^{bt}, \quad t \in [0, \tfrac{k\tau}{2}], \tag{1.8}$$

其中 k 为正整数.

当 $k=1$ 时，由 (1.6) 可得 (1.8) 成立.

设对某个 k,(1.8) 成立，则对 k+1 的情形，设

$$t \in [\frac{\tau}{2}, \frac{(k+1)\tau}{2}],$$

记 $t_1 = t - \frac{\tau}{2} \in [0, \frac{k\tau}{2}]$, 由 (1.7) 和归纳假设得

$$\begin{aligned} y(t) &\le (ay(t_1) + \int_{t_1}^t |f_1(s)|ds + M|F_2(t)|)e^{a_2\frac{\tau}{2}} \\ &= [a(a\|\varphi\| + \int_0^{t-\frac{\tau}{2}} |f_1(s)|ds + \tfrac{2}{\tau}(t - \tfrac{\tau}{2} \\ &\quad + \tfrac{\tau}{2})M|F_2(t - \tfrac{\tau}{2}))e^{bt-\frac{\tau}{2}} \\ &\quad + \int_{t-\frac{\tau}{2}}^t |f_1(s)|ds + MF_2(t)]e^{a_2\frac{\tau}{2}} \\ &\le (a\|\varphi\| + \int_0^t |f_1(s)|ds + \tfrac{2}{\tau}(t + \tfrac{\tau}{2})MF_2(t))e^{bt}, \end{aligned}$$

故 (1.8) 总成立.

综上所述，我们有

定理 1. 2　设 $x(t)=x(t,\varphi)$ 为退化滞后微分系统 (1.2) 的解，则存在正的常数 a,b,M 使得

$$|x(t,\varphi)|\le ae^{bt}(|\varphi|+\frac{1}{a}\int_0^t|f_1(s)|ds+\frac{2}{a\tau}(t+\frac{\tau}{2})MF_2(t)),\quad (1.9)$$

其中 $F_2(t)=\sup\limits_{0\le t_1\le t}|f_2(t_1)|$.

||

式 (1.9) 即为退化时滞微分系统 (1.2) 的指数估计式.

注:　关于退化中立型微分系统的解的指数估计，我们可以以同样的方法进行讨论，并得到类似的结论.

§3.2　退化滞后线性微分系统的解

本节用 D- 逆阵给出退化滞后系统的基础解、常数变易公式与通解，确定了这类退化系统的基本理论. 它将被广泛地应用于各类退化控制系统.

考虑柯西问题

$$\begin{cases} E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-1)+f(t), & t\ge 0,\\ x(t)=\varphi(t), & -1\le t\le 0, \end{cases}\qquad (2.1)$$

其中 E,A,$B\in R^{n\times n}$,$|E|=0$;$x(t)$, $f(t)$,$\varphi(t)\in R^n$；　$\varphi(t)$ 为相容的初始函数.

由第一章可得，如果 (E,A) 正则，则系统 (2.1) 的解存在唯一，且可作适当的变换，使得 $EA=AE$. 因而本节总假定 $EA=AE$.

将 (2.1) 分成如下三个系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + EE^d f(t), & t \geq 0, \\ x(t) \equiv 0, & -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + (I - EE^d) f(t), \quad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi_1(0), & t = 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $\varphi_1(0)$ 为任一相容的初始值.

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1), & t \geq 0, \\ x(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t) - \varphi_1(t), & -1 \leq t \leq 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

由线性系统的叠加原理可得

引理 2.1　如 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 分别为 (2.2),(2.3),(2.4) 的解, 则 $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ 为 (2.1) 的解.

我们首先讨论系统 (2.2) 的解.

定义 2.1　设 $X(t) \in R^{n\times n}$, 则称满足

$$\begin{cases} E\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t-1), \quad t \geq 0, \\ X(t) = \begin{cases} EE^d, & t = 0, \\ 0, & -1 \leq t < 0, \end{cases} \end{cases} \tag{2.5}$$

的 X(t) 为系统 (2.1) 的基础解.

定理 2.1　设 X(t) 为系统 (2.1) 的基础解, 且 (E, A) 正则, 则系统 (2.2) 的唯一解为

$$x(t) = \int_0^t X(t-s) E^d f(s) ds.$$

证明：因为

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= \int_0^t E\dot{X}(t-s)E^d f(s)ds + EX(0)E^d f(t) \\ &= \int_0^t (AX(t-s)+BX(t-s-1))E^d f(s)ds \\ &\quad +EEE^dE^d f(t) \\ &= A\int_0^t X(t-s)E^d f(s)ds \\ &\quad +B\int_0^t X(t-s-1)E^d f(s)ds + EE^d f(t) \\ &= Ax(t) + B\int_0^{t-1} X(t-s-1)E^d f(s)ds \\ &\quad +EE^d f(t) \\ &= Ax(t)+Bx(t-1)+EE^d f(t), \end{aligned}$$

故 $x(t)$ 为系统 (2.2) 的解. 由当 (E, A) 正则时解的唯一性可得，所给的解为系统 (2.2) 的解. 定理 2.1 证毕.

设

$$E_k = \begin{pmatrix} E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E \end{pmatrix} \in R^{(k+1)n\times(k+1)n},$$

则我们有：

引理 2.2

(1) $E_k^d = \begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^d \end{pmatrix}$;

(2) $ind(E_k) = ind(E) = h$.

证明：因为

$$E_k\begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EE^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & EE^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & EE^d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E^dE & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^dE & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^dE \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^d \end{pmatrix} E_k,$$

$$\begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^d \end{pmatrix} E_k \begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E^dEE^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^dEE^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^dEE^d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^d \end{pmatrix},$$

$$
E_k^{h+1}\begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^d \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} E^{h+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^{h+1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^{h+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^d \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} E^{h+1}E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^{h+1}E^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^{h+1}E^d \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} E^h & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^h & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^h \end{pmatrix} = E_k^h,
$$

由 D- 逆阵的定义得

$$
E_k^d = \begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E^d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E^d \end{pmatrix}.
$$

而且 $ind(E_k) = ind(E) = h$ 引理 2.2 证毕.

设

$$A_k = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B & A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & A \end{pmatrix} \in R^{(k+1)n\times(k+1)n},$$

我们有

引理 2.3　如果 (E,A) 正则，则 (E_k, A_k) 也为正则的.

证明：因为

$$\lambda E_k + A_k = \begin{pmatrix} \lambda E + A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B & \lambda E + A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda E + A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & \lambda E + A \end{pmatrix},$$

所以

$$|\lambda E_k + A_k| = |\lambda E + A|^{k+1} \neq 0,$$

故引理 2.3 成立.

设

$$X_k(\tau) \;\; = X(k+\tau), \tau \in [0,1),$$

$$Z_k(\tau) = \begin{pmatrix} X_0(\tau) \\ X_1(\tau) \\ \vdots \\ X_k(\tau) \end{pmatrix} \in R^{(k+1)n\times n},$$

$$I_k = (0,0,\cdots,0,I) \in R^{n\times(k+1)n},$$

(其中 I 为适当阶的单位矩阵，下同)，
则 (2.5) 可化为

$$E_k\dot{Z}_k(\tau) = A_kZ_k(\tau). \tag{2.6}$$

定理 2.2 如果 (E,A) 正则， EB=BE, 则 (2.5) 的唯一解为

$$Z_k(\tau) = e^{E_k^dA_k\tau}Z_k(0),$$

其中

$$Z_k(0) = \begin{pmatrix} X_0(0) \\ X_1(0) \\ \vdots \\ X_k(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EE^d \\ Z_{k-1}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EE^d \\ e^{E_{k-1}^dA_{k-1}}Z_{k-1}(0) \end{pmatrix}.$$

证明：由本节开始的假定 $EA = AE$ 和 $EB = BE$, 我们首先证明 $E_kA_k = A_kE_k$:

$$E_kA_k = \begin{pmatrix} E & & & \\ & E & & \\ & & \ddots & \\ & & & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & & & \\ B & A & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B & A \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} EA & & & \\ EB & EA & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & EB & EA \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} AE & & & \\ BE & AE & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & BE & AE \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} A & & & \\ B & A & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & & & \\ & E & & \\ & & \ddots & \\ & & & E \end{pmatrix}
$$

$= A_k E_k$.

再来证明 $Z_k(0) = E_k E_k^d Z_k(0)$.

显然 $k=0$ 时

$Z_0(0) = X_0(0) = EE^d = EE^d EE^d = EE^d X_0(0) = EE^d Z_0(0)$.

设 $Z_{k-1}(0) = E_{k-1}E_{k-1}^d Z_{k-1}(0)$ 成立. 则

$$
\begin{aligned}
Z_k(0) &= \begin{pmatrix} EE^d \\ e^{E_{k-1}^d A_{k-1}} Z_{k-1}(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} EE^d EE^d \\ e^{E_{k-1}^d A_{k-1}} E_{k-1}E_{k-1}^d Z_{k-1}(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} EE^d & 0 \\ 0 & E_{k-1}E_{k-1}^d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} EE^d \\ e^{E_{k-1}^d A_{k-1}} Z_{k-1}(0) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^d & 0 \\ 0 & E^d_{k-1} \end{pmatrix} Z_k(0)$$
$$= E_k E^d_k Z_k(0).$$

这样

$$\begin{aligned} E_k \dot{Z}_k(\tau) &= E_k(E^d_k A_k e^{E^d_k A_k \tau} Z_k(0)) = A_k e^{E^d_k A_k \tau}(E_k E^d_k Z_k(0)) \\ &= A_k e^{E^d_k A_k \tau} Z_k(0) = A_k Z_k(\tau), \end{aligned}$$

由 (E,A) 正则，(E_k, A_k) 必正则. 定理 2.2 证毕.

我们知道，当 $t \in [k, k+1]$ 时，

$$X(t) = X_k(t-k) = I_k Z_k(t-k) = I_k e^{E^d_k A_k (t-k)} Z_k(0).$$

设 [t] 为 t 的整数部分，则我们易得

定理 2.3 如果 (E,A) 正则， EB=BE, 则 (2.5) 的唯一解为

$$X(t) = I_{[t]} e^{E^d_{[t]} A_{[t]} (t-[t])} Z_{[t]}(0).$$

由定理 2.1 和定理 2.3 得

定理 2.4 如果 (E,A) 正则， EB=BE, 则 (2.5) 的唯一解为

$$x(t) = \int_0^t I_{[t-s]} e^{E^d_{[t-s]} A_{[t-s]} (t-s-[t-s])} Z_{[t-s]}(0) E^d f(s) ds.$$

下面讨论系统 (2.3) 的解.

我们设

$$y_k(\tau) = \begin{pmatrix} x(\tau) \\ x(1+\tau) \\ \vdots \\ x(k+\tau) \end{pmatrix} \in R^{(k+1)n \times 1},$$

$$F_k(\tau)=\begin{pmatrix} f(\tau)\\ f(1+\tau)\\ \vdots\\ f(k+\tau)\end{pmatrix}\in R^{(k+1)n\times 1},$$

$$I_k=(0,0,\cdots,0,I)\in R^{n\times(k+1)n},$$

则有 $x(k+\tau)=I_k y_k(\tau)$. 这样系统 (2.3) 可化为

$$E_k\dot{y}_k(\tau)=A_k y_k(\tau)+(I-E_kE_k^d)F_k(\tau). \tag{2.7}$$

引理 2.4　如果 (E,A) 正则，且 $EB=BE$, 则

$$(I-E_kE_k^d)A_kA_k^d=I-E_kE_k^d.$$

证明：如果 (E,A) 正则，必存在常数 c, 使得 $|cE+A|\neq 0$, 这样

$$|cE_k+A_k|=|cE+A|^{k+1}\neq 0,$$

即 $P_k\triangleq cE_k+A_k$ 可逆.

由于 $E_kA_k=A_kE_k$, 有 $P_kE_k=E_kP_k, P_kA_k=A_kP_k$ ，从而

$$P_k^{-1}E_k=E_kP_k^{-1},\qquad P_k^{-1}A_k=A_kP_k^{-1}.$$

设 $\hat{A}_k=P_k^{-1}A_k, \hat{E}_k=P_k^{-1}E_k$.

下面我们来证明

$$\hat{A}_k^d=A_k^dP_k, \hat{E}_k^d=E_k^dP_k.$$

由于 $P_kA_k=A_kP_k$, 则 $A_k=P_k^{-1}A_kP_k$, 从而 $A_k^d=P_k^{-1}A_k^dP_k$ ，即

$$P_kA_k^d=A_k^dP_k,$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_k(P_kA_k^d) &= P_k^{-1}A_k(P_kA_k^d) = A_kP_k^{-1}P_kA_k^d\\ &= A_kA_k^d = A_k^dA_k\\ &= A_k^dP_kP_k^{-1}A_k = (P_kA_k^d)\hat{A}_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(P_kA_k^d)\hat{A}_k(P_kA_k^d) &= (P_kA_k^d)(A_kP_k^{-1}P_kA_k^d)\\ &= P_kA_k^dA_kA_k^d = P_kA_k^d,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_k^{h+1}(P_kA_k^d) &= (A_kP_k^{-1})^{h+1}P_kA_k^d\\ &= (P_k^{-1})^{h+1}P_kA_k^{h+1}A_k^d = (P_k^{-1})^hA_k^h = \hat{A}_k^h.\end{aligned}$$

故 $\hat{A}_k^d = P_kA_k^d = A_k^dP_k$.

同理可证 $\hat{E}_k^d = P_kE_k^d = E_k^dP_k$.

由于 $\hat{E}_k$ 奇异，必存在非奇异矩阵 T_k 使得

$$\hat{E}_k = T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k} & 0 \\ 0 & J_{0k} \end{pmatrix}T_k.$$

其中 $|J_{1k}| \neq 0, J_{0K}$ 为幂零矩阵. 则

$$\hat{E}_k^d = T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T_k.$$

而

$$\hat{A}_k = I - c\hat{E}_k = T_k^{-1}\begin{pmatrix} I - cJ_{1k} & 0 \\ 0 & I - cJ_{0k} \end{pmatrix}T_k.$$

由于 J_{0k} 为幂零矩阵，有 $I - cJ_{0k}$ 可逆. 则有

$$\hat{A}_k^d = T_k^{-1}\begin{pmatrix} (I - cJ_{1k})^d & 0 \\ 0 & (I - cJ_{0k})^{-1} \end{pmatrix}T_k,$$

$$\begin{aligned}\hat{E}_k\hat{E}_k^d &= T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k} & 0 \\ 0 & J_{0k}\end{pmatrix} T_k T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} T_k \\ &= T_k^{-1}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} T_k,\end{aligned}$$

$$I-\hat{E}_k\hat{E}_k^d = T_k^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix} T_k$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_k\hat{A}_k^d &= T_k^{-1}\begin{pmatrix} I-cJ_{1k} & 0 \\ 0 & I-cJ_{0k}\end{pmatrix} T_k \\ &\quad \times T_k^{-1}\begin{pmatrix} (I-cJ_{1k})^d & 0 \\ 0 & (I-cJ_{0k})^{-1}\end{pmatrix} T_k \\ &= T_k^{-1}\begin{pmatrix} (I-cJ_{1k})(I-cJ_{1k})^d & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix} T_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(I-\hat{E}_k\hat{E}_k^d)\hat{A}_k\hat{A}_k^d &= T_k^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix} T_k \\ &\quad \times T_k^{-1}\begin{pmatrix} (I-cJ_{1k})(I-cJ_{1k})^d & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix} T_k \\ &= T_k^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix} T_k = I-\hat{E}_k\hat{E}_k^d,\end{aligned}$$

又由于

$$\begin{aligned}(I-\hat{E}_k\hat{E}_k^d)\hat{A}_k\hat{A}_k^d &= (I-P_k^{-1}E_kE_k^dP_k)P_k^{-1}A_kA_k^dP_k \\ &= P_k^{-1}(I-E_kE_k^d)A_kA_k^dP_k\end{aligned}$$

而

$$(I-\hat{E}_k\hat{E}_k^d)=I-P_k^{-1}E_kE_k^dP_k=P_k^{-1}(I-E_kE_k^d)P_k,$$

即

$$P_k^{-1}((I-E_kE_k^d)A_kA_k^d)P_k=P_k^{-1}(I-E_kE_k^d)P_k,$$

故

$$(I-E_kE_k^d)A_kA_k^d=I-E_kE_k^d.$$

引理 2.4 证毕.

引理 2.5 如果 (E,A) 正则，且 $EB=BE$, 则

$$E_kA_k^d=A_k^dE_k,\quad E_k^dA_k^d=A_k^dE_k^d,\quad E_k^dA_k=A_kE_k^d.$$

证明：如引理 2.4 的证明中所设，我们有

$$\hat{E}_k\hat{A}_k^d=T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k}(I-cJ_{1k})^d & 0 \\ 0 & J_{0k}(I-cJ_{0k})^{-1}\end{pmatrix}T_k.$$

因为

$$I-cJ_{1k}=J_{1k}(I-cJ_{1k})J_{1k}^{-1},$$

所以

$$(I-cJ_{1k})^d=J_{1k}(I-cJ_{1k})^dJ_{1k}^{-1},$$

故

$$J_{1k}(I-cJ_{1k})^d=(I-cJ_{1k})^dJ_{1k}.$$

又因为 $J_{0k}(I-cJ_{0k})=(I-cJ_{0k})J_{0k}$, 所以 $J_{0k}(I-cJ_{0k})^{-1}=(I-cJ_{0k})^{-1}J_{0k}$, 故

$\hat{E}_k\hat{A}_k^d=T_k^{-1}\begin{pmatrix} (I-cJ_{1k})^dJ_{1k} & 0 \\ 0 & (I-cJ_{0k})^{-1}J_{0k}\end{pmatrix}T_k=\hat{A}_k^d\hat{E}_k$, 即

$A_k^dE_k=A_k^dP_kP_k^{-1}E_k=\hat{A}_k^d\hat{E}_k=\hat{E}_k\hat{A}_k^d=E_kP_k^{-1}P_kA_k^d=E_kA_k^d.$

由于

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_k^d\hat{A}_k^d &= T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_k T_k^{-1} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} (I-cJ_{1k})^d & 0 \\ 0 & (I-cJ_{0k})^{-1} \end{pmatrix} T_k \\
&= T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k}^{-1}(I-cJ_{1k})^d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_k,
\end{aligned}
$$

而且 $J_{1k}(I-cJ_{1k})^d=(I-cJ_{1k})^dJ_{1k}$ ，我们有 $J_{1k}^{-1}(I-cJ_{1k})^d=(I-cJ_{1k})^dJ_{1k}^{-1}$. 所以

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_k^d\hat{A}_k^d &= T_k^{-1}\begin{pmatrix} (I-cJ_{1k})^dJ_{1k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_k \\
&= T_k^{-1}\begin{pmatrix} (I-cJ_{1k})^d & 0 \\ 0 & (I-cJ_{0k})^{-1} \end{pmatrix} T_k \\
&\quad \times T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_k = \hat{A}_k^d\hat{E}_k^d.
\end{aligned}
$$

又

$$\hat{E}_k^d\hat{A}_k^d = P_kE_k^dP_kA_k^d = P_k^2E_k^dA_k^d,$$

而且 $\hat{A}_k^d\hat{E}_k^d=P_k^2A_k^dE_k^d$, 即 $P_k^2E_k^dA_k^d=P_k^2A_k^dE_k^d$, 故 $E_k^dA_k^d=A_k^dE_k^d$.

因为

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_k^d\hat{A}_k &= T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k}^{-1}(I-cJ_{1k}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_k \\
&= T_k^{-1}\begin{pmatrix} (I-cJ_{1k})J_{1k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= T_k^{-1}\begin{pmatrix} I - cJ_{1k} & 0 \\ 0 & I - cJ_{0k} \end{pmatrix} T_k T_k^{-1} \begin{pmatrix} J_{1k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_k \\
&= \hat{A}_k \hat{E}_k^d,
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
E_k^d A_k &= E_k^d P_k P_k^{-1} A_k = \hat{E}_k^d \hat{A}_k \\
&= \hat{A}_k \hat{E}_k^d = A_k P_k P_k^{-1} E_k^d = A_k E_k^d.
\end{aligned}
$$

引理 2.5 证毕.

定理 2.5 如果 (E,A) 正则， EB=BE, 则 (2.7) 的唯一解为

$$
y_k(\tau) = -(I - E_k E_k^d) \sum_{i=0}^{h-1} E_k^i (A_k^d)^{i+1} F_k^{(i)}(\tau),
$$

其中 $h = ind(E)$.

证明：由引理 2.5 得

$$
\begin{aligned}
E_k \dot{y}_k(\tau) &= -E_k(I - E_k E_k^d) \sum_{i=0}^{h-1} E_k^i (A_k^d)^{i+1} F_k^{(i+1)}(\tau) \\
&= -E_k(I - E_k E_k^d) \sum_{i=1}^{h} (E_k A_k^d)^{i-1} A_k^d F_k^{(i)}(\tau) \\
&= -(I - E_k E_k^d) \sum_{i=1}^{h} (E_k A_k^d)^{i} F_k^{(i)}(\tau) \\
&= -(I - E_k E_k^d) \sum_{i=1}^{h-1} (E_k A_k^d)^{i} F_k^{(i)}(\tau) \\
&\quad -(I - E_k E_k^d) E_k^h (A_k^d)^h F_k^{(h)}(\tau),
\end{aligned}
$$

由于 $(I - E_k E_k^d) E_k^h = 0$, 故

$$
E_k \dot{y}_k(\tau) = -(I - E_k E_k^d) \sum_{i=1}^{h-1} (E_k A_k^d)^{i} F_k^{(i)}(\tau),
$$

由当 $i \geq 1$ 时

$$\begin{aligned}(E_kA_k^d)^i &= (E_kA_k^d)^{i-1}E_kA_k^d \\ &= (E_kA_k^d)^{i-1}E_kA_kA_k^dA_k^d = (E_kA_k^d)^iA_kA_k^d,\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}E_k\dot{y}_k(\tau) &= -(I-E_kE_k^d)\sum_{i=1}^{h-1}(E_kA_k^d)^iA_kA_k^dF_k^{(i)}(\tau) \\ &= -(I-E_kE_k^d)\sum_{i=0}^{h-1}(E_kA_k^d)^iA_kA_k^dF_k^{(i)}(\tau) \\ &\quad +(I-E_kE_k^d)A_kA_k^dF_k(\tau) \\ &= A_k(-(I-E_kE_k^d)\sum_{i=0}^{h-1}(E_kA_k^d)^iA_k^dF_k^{(i)}(\tau)) \\ &\quad +(I-E_kE_k^d)A_kA_k^dF_k(\tau).\end{aligned}$$

由引理 2.4 得

$$E_k\dot{y}_k(\tau) = A_ky_k(\tau) + (I-E_kE_k^d)F_k(\tau),$$

故由 (E,A) 的正则性得

$$y_k(\tau) = -(I-E_kE_k^d)\sum_{i=0}^{h-1}E_k^i(A_k^d)^{i+1}F_k^{(i)}(\tau)$$

为 (2.7) 的唯一解. 定理 2.5 证毕.

定理 2.6　如果 (E,A) 正则， EB=BE, 则 (2.3) 的唯一解为

$$x(t) = -(I-EE^d)\sum_{i=0}^{h-1}E^iI_{[t]}(A_{[t]}^d)^{i+1}F_{[t]}^{(i)}(t-[t]).$$

证明：设 $k=[t], \tau=t-[t]$, 则系统 (2.3) 的解为

$$x(t) = I_ky_k(\tau) = -I_k(I-E_kE_k^d)\sum_{i=0}^{h-1}E_k^i(A_k^d)^{i+1}F_k^{(i)}(\tau).$$

由于

$$
\begin{aligned}
I_k(I-E_kE_k^d) &= (0,0,\cdots,0,I) \\
&\quad\times\begin{pmatrix} I-EE^d & & & \\ & I-EE^d & & \\ & & \ddots & \\ & & & I-EE^d \end{pmatrix} \\
&= (0,0,\cdots,I-EE^d) \\
&= (I-EE^d)(0,0,\cdots,0,I)=(I-EE^d)I_k,
\end{aligned}
$$

而且

$$
\begin{aligned}
I_kE_k &= (0,0,\cdots,0,I)\begin{pmatrix} E & & & \\ & E & & \\ & & \ddots & \\ & & & E \end{pmatrix} \\
&= (0,0,\cdots,0,E)=E(0,0,\cdots,0,I)=EI_k,
\end{aligned}
$$

故我们有

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -(I-EE^d)\sum_{i=0}^{h-1} I_kE_k^i(A_k^d)^{i+1}F_k^{(i)}(\tau) \\
&= -(I-EE^d)\sum_{i=0}^{h-1} E^iI_k(A_k^d)^{i+1}F_k^{(i)}(\tau) \\
&= -(I-EE^d)\sum_{i=0}^{h-1} E^iI_{[t]}(A_{[t]}^d)^{i+1}F_{[t]}^{(i)}(t-[t])
\end{aligned}
$$

定理 2.6 证毕.

注意：初始函数 $\varphi_1(t)$ 应满足

$$\varphi_1(0)=-(I-EE^d)\sum_{i=0}^{h-1}(EA^d)^iA^df^{(i)}(0).$$

下面我们再来讨论系统 (2,4) 的解.

将系统 (2.4) 分成两个系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1), & t \geq 1, \\ E\dot{x}(t) = Ax(t) + EE^dB\varphi_2(t-1), & 0 \leq t \leq 1, \\ x(t) = EE^d\varphi_2(t), & -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{2.4a}$$

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1), & t \geq 1, \\ E\dot{x}(t) = Ax(t) + (I-EE^d)B\varphi_2(t-1), & 0 \leq t \leq 1, \\ x(t) = (I-EE^d)\varphi_2(t), & -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{2.4b}$$

其中 $\varphi_2(t) = \varphi(t) - \varphi_1(t)$.

不难证明

引理 2.6 如果 $x_1(t), x_2(t)$ 分别为系统 $(2.4a)$ 和 $(2.4b)$ 的解，则 $x_1(t) + x_2(t)$ 为系统 (2.4) 的解.

对系统 (2.5) 两边取拉氏变换，有

$$(\lambda E - A - Be^{-\lambda})L(X(t)) = EEE^d$$

由于 (E,A) 正则，且 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\lambda} = 0$. 故存在 λ 使 $(\lambda E - A - Be^{-\lambda})$ 可逆，则

$$L(X(t)) = (\lambda E - A - Be^{-\lambda})^{-1}EEE^d.$$

对系统 (2.4a) 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}E\dot{x}(t)dt &= -Ex(0) + \lambda E\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}x(t)dt \\ &= -EEE^d\varphi_2(0) + \lambda EL(x(t)), \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}E\dot{x}(t)dt &= \int_0^1 e^{-\lambda t}E\dot{x}(t)dt + \int_1^{+\infty} e^{-\lambda t}E\dot{x}(t)dt\\ &= A\int_0^1 e^{-\lambda t}x(t)dt + \int_0^1 e^{-\lambda t}EE^dB\varphi_2(t-1)dt\\ &\quad +A\int_1^{+\infty} e^{-\lambda t}x(t)dt\\ &\quad +B\int_1^{+\infty} e^{-\lambda t}x(t-1)dt\\ &= A\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}x(t)dt + Be^{-\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}x(t)dt\\ &\quad + \int_0^1 e^{-\lambda t}EE^dB\varphi_2(t-1)dt\\ &= AL(x(t)) + Be^{-\lambda}L(x(t))\\ &\quad + \int_0^1 e^{-\lambda t}EE^dB\varphi_2(t-1)dt,\end{aligned}$$

由 $E^d = EE^dE^d$ 和前两式得

$$\begin{aligned}(\lambda E - A - Be^{-\lambda})L(x(t)) &= EEE^d\varphi_2(0)\\ &\quad + \int_0^1 e^{-\lambda t}EEE^dE^dB\varphi_2(t-1)dt.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}L(x(t)) &= (\lambda E - A - Be^{-\lambda})^{-1}EEE^d\varphi_2(0)\\ &\quad + \int_0^1 e^{-\lambda t}(\lambda E - A - Be^{-\lambda})^{-1}EEE^dE^d\\ &\quad \times B\varphi_2(t-1)dt\\ &= L(X(t))(\lambda)\varphi_2(0) + \int_0^1 e^{-\lambda t}L(X(t))(\lambda)\\ &\quad \times E^dB\varphi_2(t-1)dt.\end{aligned}$$

定义 $\omega: [-1,\infty) \to [0,1]$ 如下

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0,\\ 1, & t < 0,\end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 e^{-\lambda t}L(X(t))(\lambda)E^d B\varphi_2(t-1)dt\\&=L(X(t))(\lambda)\int_0^1 e^{-\lambda t}E^d B\varphi_2(t-1)dt\\&=L(X(t))(\lambda)\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}E^d B\varphi_2(t-1)\omega(t-1)dt\\&=L(X(t))(\lambda)L(E^d B\varphi_2(t-1)\omega(t-1))(\lambda)\\&=L(\int_0^t X(t-s)E^d B\varphi_2(s-1)\omega(s-1)ds)(\lambda),\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}x(t)&=X(t)\varphi_2(0)+\int_0^t X(t-s)E^d B\varphi_2(s-1)\omega(s-1)ds\\&=X(t)\varphi_2(0)+\int_0^1 X(t-s)E^d B\varphi_2(s-1)ds\\&=X(t)\varphi_2(0)+\int_{-1}^0 X(t-\theta-1)E^d B\varphi_2(\theta)d\theta,\end{aligned}$$

从而我们有

定理 2.7　如果 (E,A) 正则，则系统 (2.4a) 的解为

$$\begin{aligned}x(t)=\;&X(t)\varphi_2(0)\\&+\int_{-1}^0 X(t-\theta-1)E^d B\varphi_2(\theta)d\theta,\end{aligned}$$

由定理 2.3 和定理 2.7 得

定理 2.8　如果 (E,A) 正则，EB=BE, 则系统 (2.4a) 的唯一解为

$$\begin{aligned}x(t)=\;&I_{[t]}e^{E_{[t]}^d A_{[t]}(t-[t])}Z_{[t]}(0)\varphi_2(0)\\&+\int_{-1}^0 I_{[t-\theta-1]}e^{E_{[t-\theta-1]}^d A_{[t-\theta-1]}(t-\theta-1-[t-\theta-1])}\\&\times Z_{[t-\theta-1]}(0)E^d B\varphi_2(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

仿照系统 (2.3) 的讨论，我们可以将系统 (2.4b) 化为

$$
\begin{aligned}
E_k\dot{y}_k(\tau) &= A_k y_k(\tau) + \begin{pmatrix} (I-EE^{d})B\varphi_2(\tau-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= A_k y_k(\tau) + (I - E_k E_k^d)\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} B\varphi_2(\tau-1).
\end{aligned}
$$

类似于定理 2.6 的证明，我们可证

定理 2.9　如果 (E,A) 正则， EB=BE, 则 (2.4b) 的唯一解为

$$
x(t) = -(I - EE^{d})\sum_{i=0}^{h-1} E^{i} I_{[t]}(A_{[t]}^{d})^{i+1}(I,0,\cdots,0)^{T}B\varphi_2^{(i)}(t-[t]-1).
$$

由引理 2.6, 定理 2.8 和定理 2.9 我们得

定理 2.10　如果 (E,A) 正则， EB=BE, 则 (2.4) 的唯一解为

$$
\begin{aligned}
x(t) = \;& I_{[t]}e^{E_{[t]}^{d}A_{[t]}(t-[t])}Z_{[t]}(0)\varphi_2(0) \\
& + \int_{-1}^{0} I_{[t-\theta-1]}e^{E_{[t-\theta-1]}^{d}A_{[t-\theta-1]}(t-\theta-1-[t-\theta-1])} \\
& \times Z_{[t-\theta-1]}(0)E^{d}B\varphi_2(\theta)d\theta \\
& -(I-EE^{d})\sum_{i=0}^{h-1} E^{i}I_{[t]}(A_{[t]}^{d})^{i+1} \\
& \times (I,0,\cdots,0)^{T}B\varphi_2^{(i)}(t-[t]-1),
\end{aligned}
$$

其中

$$\varphi_2=\begin{cases}\varphi(0)+(I-EE^d)\sum\limits_{i=0}^{h-1}(EA^d)^i f^{(i)}(0), & t=0,\\ \varphi(t), & -1\le t<0.\end{cases}$$

最后，关于系统 (2.1) 的解，由引理 2.1, 定理 2.4, 定理 2.6 和定理 2.10, 我们可得

定理 2.11 如果 (E,A) 正则， EB=BE, 则 (2.1) 的唯一解为

$$\begin{aligned}x(t)= &\ I_{[t]}e^{E^d_{[t]}A_{[t]}(t-[t])}Z_{[t]}(0)\varphi_2(0)\\ &+\int_{-1}^{0}I_{[t-\theta-1]}e^{E^d_{[t-\theta-1]}A_{[t-\theta-1]}(t-\theta-1-[t-\theta-1])}\\ &\quad\times Z_{[t-\theta-1]}(0)E^dB\varphi_2(\theta)d\theta\\ &+\int_0^t I_{[t-s]}e^{E^d_{[t-s]}A_{[t-s]}(t-s-[t-s])}Z_{[t-s]}(0)E^d f(s)ds\\ &-(I-EE^d)\sum_{i=0}^{h-1}E^iI_{[t]}(A^d_{[t]})^{i+1}(F^{(i)}_{[t]}(t-[t])\\ &+(I,0,\cdots,0)^TB\varphi_2^{(i)}(t-[t]-1)).\end{aligned}$$

§3.3 退化中立型微分系统的常数变易公式和通解

本节我们讨论退化中立型微分系统，将其分成三组系统，定义相应的基础解，并求出其通解．从而给出退化中立型微分系统的常数变易公式和解的明确表示．完全推广了常微分方程的基本理论．

考虑退化中立型微分系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) + C\dot{x}(t-1) = Ax(t) + Bx(t-1) + f(t), \\ \qquad\qquad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \qquad -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $E, A, B, C \in R^{n\times n}, |E| = 0; x(t), f(t) \in R^n; \varphi(t) \in R^n$ 为可容的初始函数. 如果 (E,A) 正则, 则不妨设 E 与 A 可交换.

定理 3.1 如果 (E,A) 正则, 则 (3.1) 的解存在且唯一.

证明: 当 $t \in [0,1)$ 时, 系统 (3.1) 为

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(t-1) - C\dot{\varphi}(t-1) + f(t),$$

由于 $B\varphi(t-1) - C\dot{\varphi}(t-1) + f(t)$ 为已知函数, 系统为无滞后的一般退化微分系统. 由文献 [5] 得, 其解存在唯一. 同理可证, 当 $t \in [1,2)$ 时, 结论成立. 用归纳法可证对任何 $t \in R$, 结论都成立. 定理 3.1 证毕.

我们将 (3.1) 分成如下三个系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) + C\dot{x}(t-1) = Ax(t) + Bx(t-1) + EE^d f(t), \\ \qquad\qquad t \geq 0, \\ x(t) \equiv 0, \qquad -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) + C\dot{x}(t-1) = Ax(t) + Bx(t-1) + (I - EE^d) f(t), \\ \qquad\qquad t \geq 0, \\ x(t) \equiv 0, \qquad -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

和

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) + C\dot{x}(t-1) = Ax(t) + Bx(t-1), \\ \qquad\qquad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \qquad -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

引理 3.1　如 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 分别为 (3.2),(3.3),(3.4) 的解，则 $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ 为 (3.1) 的解.

定义 3.1　设 $X(t) \in R^{n\times n}$, 且满足

$$\begin{cases} E\dot{X}(t) + C\dot{X}(t-1) = AX(t) + BX(t-1), \quad t \geq 0, \\ X(t) = \begin{cases} EE^d, & t = 0, \\ 0, & -1 \leq t < 0 \end{cases} \end{cases} \tag{3.5}$$

则称 X(t) 为系统 (3.2) 对应的基础解.

定义 3.2　设 $Y(t) \in R^{n\times n}$, 且满足

$$\begin{cases} E\dot{Y}(t) + C\dot{Y}(t-1) = AY(t) + BY(t-1) + (I - EE^d)\delta(t), \\ \qquad\qquad t \geq 0, \\ Y(t) = \begin{cases} I - EE^d, & t = 0, \\ 0, & -1 \leq t < 0, \end{cases} \end{cases} \tag{3.6}$$

则称 Y(t) 为系统 (3.3) 对应的基础解. 这里 $\delta(t)$ 为脉冲函数.

我们首先讨论系统 (3.2) 的解.

对系统 (3.5) 两边取拉氏变换得

$$(\lambda E + C\lambda e^{-\lambda} - A - Be^{-\lambda})L(X(t)) = EX(0) = EEE^d,$$

由 (E,A) 正则，且当 λ 的实部充分大时，$e^{-\lambda}$ 与 $\lambda e^{-\lambda}$ 可以充分地小，可得存在 λ 使得 $(\lambda E + C\lambda e^{-\lambda} - A - Be^{-\lambda})$ 可逆. 这时

$$L(X(t)) = (\lambda E + C\lambda e^{-\lambda} - A - Be^{-\lambda})^{-1}EEE^d.$$

对系统 (3.2) 取拉氏变换得

$$(\lambda E + C\lambda e^{-\lambda} - A - Be^{-\lambda})L(x(t)) = EE^dL(f(t)),$$

这样，我们有

$$\begin{aligned} L(x(t)) &= (\lambda E + C\lambda e^{-\lambda} - A - Be^{-\lambda})^{-1} E E^d L(f(t)) \\ &= (\lambda E + C\lambda e^{-\lambda} - A - Be^{-\lambda})^{-1} E E E^d E^d L(f(t)) \\ &= L(X(t)) E^d L(f(t)), \end{aligned}$$

故有

$$x(t) = \int_0^t X(t-s) E^d f(s) ds.$$

因而有系统 (3.2) 的常数变易公式

定理 3.2 设 (E,A) 正则， $X(t)$ 为系统 (3.5) 的解，则系统 (3.2) 的常数变易公式为

$$x(t) = \int_0^t X(t-s) E^d f(s) ds.$$

下面我们讨论系统 (3.5) 的解.

设 k 为正整数， $\tau \in [0,1)$, 由 (3.5) 可得

$$\begin{cases} E\dot{X}(\tau) = AX(\tau), \\ \qquad X(0) = EE^d, \\ E\dot{X}(1+\tau) + C\dot{X}(\tau) = AX(1+\tau) + BX(\tau), \\ \qquad X(1) = X(1-0), \\ E\dot{X}(2+\tau) + C\dot{X}(1+\tau) = AX(2+\tau) + BX(1+\tau), \\ \qquad X(2) = X(2-0), \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ E\dot{X}(k+\tau) + C\dot{X}(k-1+\tau) = AX(k+\tau) \\ \qquad + BX(k-1+\tau), \\ \qquad X(k) = X(k-0). \end{cases}$$

记

$$E_k = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C & E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C & E & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C & E \end{pmatrix} \in R^{(k+1)n\times(k+1)n},$$

$$A_k = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B & A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & A \end{pmatrix} \in R^{(k+1)n\times(k+1)n},$$

设

$$X_k(\tau) = X(k+\tau), \tau \in [0,1),$$

$$Z_k(\tau) = \begin{pmatrix} X_0(\tau) \\ X_1(\tau) \\ \vdots \\ X_k(\tau) \end{pmatrix} \in R^{(k+1)n\times n},$$

$$I_k = (0, 0, \cdots, 0, I) \in R^{n\times(k+1)n},$$

(其中 I 为适当阶的单位矩阵，下同), 则系统 (3.5) 可以写作

$$E_k\dot{Z}_k(\tau) = A_k Z_k(\tau), \qquad \tau \in [0,1). \tag{3.7}$$

如果 $t \in [k, k+1)$, 则有

$$X(t) = X(k+t-k) = I_k Z_k(t-k). \tag{3.8}$$

引理 3.2 如果 (E,A) 正则，则 (E_k, A_k) 也正则.

证明：由于 (E,A) 正则，存在 s 使得 $|sE+A| \neq 0$, 而

$$|sE_k + A_k| = \begin{vmatrix} sE+A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ sC+B & sE+A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & sC+B & sE+A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & sE+A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & sC+B & sE+A \end{vmatrix} = |sE+A|^{k+1} \neq 0,$$

故 (E_k, A_k) 也正则. 引理 3.2 证毕.

如果 (E,A) 正则，则存在 λ_0, 使得 $\lambda_0 E_k + A_k$ 可逆. 令 $\hat{E}_k = (\lambda_0 E_k + A_k)^{-1} E_k, \hat{A}_k = (\lambda_0 E_k + A_k)^{-1} A_k$.

引理 3.3 $\hat{E}_k \hat{A}_k = \hat{A}_k \hat{E}_k$, $\hat{E}_k^d \hat{A}_k = \hat{A}_k \hat{E}_k^d$.

证明：由于 $\hat{A}_k = I - \lambda_0 \hat{E}_k$, 从而

$$\begin{aligned} \hat{E}_k \hat{A}_k &= \hat{E}_k - \lambda_0 \hat{E}_k \hat{E}_k = (I - \lambda_0 \hat{E}_k)\hat{E}_k \\ &= \hat{A}_k \hat{E}_k, \\ \hat{E}_k^d \hat{A}_k &= \hat{E}_k^d - \lambda_0 \hat{E}_k^d \hat{E}_k \hat{E}_k^d - \lambda_0 \hat{E}_k \hat{E}_k^d \\ &= (I - \lambda_0 \hat{E}_k)\hat{E}_k^d = \hat{A}_k \hat{E}_k^d, \end{aligned}$$

引理 3.3 证毕.

定理 3.3 如果 (E,A) 正则，则 (3.7) 的解为

$$Z_k(\tau) = e^{\hat{E}_k^d \hat{A}_k \tau} \hat{E}_k \hat{E}_k^d Z_k(0),$$

而且 $Z_k(0) = \hat{E}_k \hat{E}_k^d Z_k(0)$.

其中 $\tau \in [0,1)$,

$$Z_k(0) = \begin{pmatrix} EE^d \\ Z_{k-1}(1-0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} EE^{d} \\ e^{\hat{E}_{k-1}^{d}\hat{A}_{k-1}}\hat{E}_{k-1}\hat{E}_{k-1}^{d}Z_{k-1}(0). \end{pmatrix}$$

证明：由 (E,A) 正则得 $(\hat{E}_k, \hat{A}_k)$ 也正则．设

$$\hat{E}_k = T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k} & 0 \\ 0 & J_{0k} \end{pmatrix} T_k,$$

其中 J_{0k} 为一个幂零矩阵， J_{1k} 为一个非异矩阵，则有

$$\hat{A}_k = I - \lambda_0 \hat{E}_k = T_k^{-1}\begin{pmatrix} I - \lambda_0 J_{1k} & 0 \\ 0 & I - \lambda_0 J_{0k} \end{pmatrix} T_k,$$

代入 (3.7) 得

$$T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k} & 0 \\ 0 & J_{0k} \end{pmatrix} T_k \dot{Z}_k(\tau) = T_k^{-1}\begin{pmatrix} I - \lambda_0 J_{1k} & 0 \\ 0 & I - \lambda_0 J_{0k} \end{pmatrix} T_k Z_k(\tau).$$

令 $T_k Z_k(\tau) = \begin{pmatrix} g_{1k}(\tau) \\ g_{2k}(\tau) \end{pmatrix}$，其中 g_{1k} 的行与 J_{1k} 的阶数相同，g_{2k} 的行与 J_{0k} 的阶数相同，则方程 (3.7) 化为

$$J_{1k}\dot{g}_{1k}(\tau) = (I - \lambda_0 J_{1k}) g_{1k}(\tau), \tag{3.7a}$$

$$J_{0k}\dot{g}_{2k}(\tau) = (I - \lambda_0 J_{0k}) g_{2k}(\tau), \tag{3.7b}$$

由 (3.7a) 得

$$g_{1k}(\tau) = e^{J_{1k}^{-1}(I - \lambda_0 J_{1k})\tau} g_{1k}(0).$$

用 $J_{0k}^{l_k-1}$ 乘 (3.7b) 得

$$J_{0k}^{l_k}\dot{g}_{2k}(\tau)=(J_{0k}^{l_k-1}-\lambda_0 J_{0k}^{l_k})g_{2k}(\tau),$$

从而 $J_{0k}^{l_k-1}g_{2k}(\tau)=0$. 其中 $l_k=ind(J_{0k})=ind(E_k)$.
再用 $J_{0k}^{l_k-2}$ 乘 (3.7b) 得

$$J_{0k}^{l_k-1}\dot{g}_{2k}(\tau)=(J_{0k}^{l_k-2}-\lambda_0 J_{0k}^{l_k-1})g_{2k}(\tau),$$

从而 $J_{0k}^{l_k-2}g_{2k}(\tau)=0$.

依次类推，我们可得 $J_{0k}^{l_k-i}g_{2k}(\tau)=0,(i=3,4,\cdots,k-1)$. 从而我们有

$$\begin{aligned} g_{2k}(\tau) &=(I-\lambda_0 J_{0k})g_{2k}(\tau)+\lambda_0 J_{0k}g_{2k}(\tau)\\ &=(J_{0k}g_{2k}(\tau))^{\cdot}+\lambda_0 J_{0k}g_{2k}(\tau)=0. \end{aligned}$$

故系统 (3.7) 的解为

$$\begin{aligned} Z_k(\tau) &=T_k^{-1}\begin{pmatrix} g_{1k}(\tau)\\ g_{2k}(\tau)\end{pmatrix}=T_k^{-1}\begin{pmatrix} e^{J_{1k}^{-1}(I-\lambda_0 J_{1k})\tau}g_{1k}(0)\\ 0\end{pmatrix}\\ &=T_k^{-1}\begin{pmatrix} e^{J_{1k}^{-1}(I-\lambda_0 J_{1k})\tau} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}T_k\\ &\quad\times T_k^{-1}\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T_kT_k^{-1}\begin{pmatrix} g_{1k}(0)\\ g_{2k}(0)\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \hat{E}_k\hat{E}_k^d &=T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k} & 0\\ 0 & J_{0k}\end{pmatrix}T_k\\ &\quad\times T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T_k=T_k^{-1}\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\hat{E}_k^d\hat{A}_k\tau} &= exp\left(T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T_k\right. \\ &\left.\times T_k^{-1}\begin{pmatrix} I-\lambda_0 J_{1k} & 0 \\ 0 & I-\lambda_0 J_{0k} \end{pmatrix}T_k\tau\right) \\ &= exp\left(T_k^{-1}\begin{pmatrix} J_{1k}^{-1}(I-\lambda_0 J_{1k}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T_k\tau\right) \\ &= T_k^{-1}\begin{pmatrix} e^{J_{1k}^{-1}(I-\lambda_0 J_{1k})\tau} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}T_k, \end{aligned}$$

即 $Z_k(\tau)=e^{\hat{E}_k^d\hat{A}_k\tau}\hat{E}_k\hat{E}_k^d g_k(0)$, 从而 $Z_k(0)=\hat{E}_k\hat{E}_k^d g_k(0)$, 又

$$\hat{E}_k\hat{E}_k^d Z_k(0)=\hat{E}_k\hat{E}_k^d\hat{E}_k\hat{E}_k^d g_k(0)=\hat{E}_k\hat{E}_k^d g_k(0)=Z_k(0),$$

故 $Z_k(\tau)=e^{\hat{E}_k^d\hat{A}_k\tau}\hat{E}_k\hat{E}_k^d Z_k(0)$, 而且 $Z_k(0)=\hat{E}_k\hat{E}_k^d Z_k(0)$. 定理 3.3 证毕.

由定理 3.2 和 (3.8) 式得

定理 3.4 如果 (E,A) 正则, 则 (3.5) 的解为

$$X(t)=I_{[t]}e^{\hat{E}_{[t]}^d\hat{A}_{[t]}(t-[t])}\hat{E}_{[t]}\hat{E}_{[t]}^d Z_{[t]}(0),$$

其中 [t] 不大于 t 的最大整数.

由定理 3.2 和定理 3.4 得

定理 3.5 如果 (E,A) 正则, 则 (3.2) 的唯一解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t I_{[t-s]}e^{\hat{E}_{[t-s]}^d\hat{A}_{[t-s]}(t-s-[t-s])} \\ &\quad\times\hat{E}_{[t-s]}\hat{E}_{[t-s]}^d Z_{[t-s]}(0)E^d f(s)ds. \end{aligned}$$

接着我们来讨论系统 (3.3) 的解.

对系统 (3.6) 两边取拉氏变换得

$$(\lambda E+C\lambda e^{-\lambda}-A-Be^{-\lambda})L(Y(t))$$
$$=E(I-EE^{d})+(I-EE^{d})=(E+I)(I-EE^{d}),$$

从而有

$$L(Y(t))=(\lambda E+C\lambda e^{-\lambda}-A-Be^{-\lambda})^{-1}(E+I)(I-EE^{d}).$$

对系统 (3.3) 取拉氏变换得

$$(\lambda E+C\lambda e^{-\lambda}-A-Be^{-\lambda})L(x(t))=(I-EE^{d})L(f(t)).$$

设 $E=T^{-1}\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{pmatrix}T$, 其中 J_1 可逆， J_0 为幂零阵，则

$$I-EE^{d}=T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}T,$$

$$E+I=T^{-1}\begin{pmatrix} J_1+I & 0 \\ 0 & J_0+I \end{pmatrix}T,$$

$$(E+I)(I-EE^{d})=T^{-1}\begin{pmatrix} J_1+I & 0 \\ 0 & J_0+I \end{pmatrix}T$$
$$\times T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}T$$
$$=T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_0+I \end{pmatrix}T.$$

由于 J_0 为幂零阵，则 $I+J_0$ 可逆．因而有

$$I-EE^{d}=T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}T=T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_0+I \end{pmatrix}T$$
$$\times T^{-1}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J_0+I \end{pmatrix}^{-1}T$$
$$=(E+I)(I-EE^{d})(I+E(I-EE^{d}))^{-1},$$

这样，我们有

$$
\begin{aligned}
L(x(t)) &= (\lambda E + C\lambda e^{-\lambda} - A - Be^{-\lambda})^{-1} \\
&\quad \times (I - EE^d)L(f(t)) \\
&= (\lambda E + C\lambda e^{-\lambda} - A - Be^{-\lambda})^{-1} \\
&\quad \times (E + I)(I - EE^d) \\
&\quad \times (I + E(I - EE^d))^{-1}L(f(t)) \\
&= L(Y(t))(I + E(I - EE^d))^{-1}L(f(t)),
\end{aligned}
$$

故由卷积公式有

$$
x(t) = \int_0^t Y(t-s)(I + E(I - EE^d))^{-1}f(s)ds,
$$

而有系统 (3.3) 的常数变易公式:

定理 3.6　设 Y(t) 为系统 (3.6) 的解，则系统 (3.3) 的常数变易公式为

$$
x(t) = \int_0^t Y(t-s)(I + E(I - EE^d))^{-1}f(s)ds.
$$

为了求出系统 (3.3) 的通解, 我们必须先给出系统 (3.6) 的解. 为此，我们给出

引理 3.4　如果 (E,A) 正则，则系统 $E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$ 的解为

$$
\begin{aligned}
x(t) = \;& e^{\hat{E}^d\hat{A}t}\hat{E}^d\hat{E}x(0) \\
& + \int_0^t e^{\hat{E}^d\hat{A}(t-\theta)}\hat{E}^d\hat{f}(\theta)d\theta - (I - \hat{E}\hat{E}^d) \\
& \sum_{i=0}^{h-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^i\hat{A}^d\hat{f}(t)^{(i)}(t),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\hat{E} = (\lambda_1 E + A)^{-1}E, \quad \hat{A} = (\lambda_1 E + A)^{-1}A,
$$

$\hat{f}(t) = (\lambda_1 E + A)^{-1} f(t), \quad h = ind(E).$

该引理的证明可参阅文献 [9].

对于系统 (3.6), 设 $\tau \in [0,1)$, 我们有

$$\left\{\begin{aligned} &E\dot{Y}(\tau) = AY(\tau) + (I - EE^d)\delta(t), \\ &\qquad\qquad Y(0) = I - EE^d, \\ &E\dot{Y}(1+\tau) + C\dot{Y}(\tau) = AY(1+\tau) + BY(\tau), \\ &\qquad\qquad Y(1) = Y(1-0), \\ &E\dot{Y}(2+\tau) + C\dot{Y}(1+\tau) = AY(2+\tau) + BY(1+\tau), \\ &\qquad\qquad Y(2) = Y(2-0), \\ &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &\qquad\qquad \cdots \\ &E\dot{Y}(k+\tau) + C\dot{Y}(k-1+\tau) = AY(k+\tau) \\ &\qquad +BY(k-1+\tau), \\ &\qquad\qquad Y(k) = Y(k-0). \end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

设

$$Y_k(\tau) = Y(k+\tau), \tau \in [0,1),$$

$$H_k(\tau) = \begin{pmatrix} Y_0(\tau) \\ Y_1(\tau) \\ \vdots \\ Y_k(\tau) \end{pmatrix} \in R^{(k+1)n\times n}.$$

显然有

$$Y(k+\tau) = I_k H_k(\tau). \tag{3.10}$$

令

$$G_k(\tau)=\begin{pmatrix}(I-EE^d)\delta(t)\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\in R^{(k+1)n\times n}.$$

则 (3.9) 可化为

$$E_k\dot{H}_k(\tau)=A_kH_k(\tau)+G_k(\tau).\tag{3.11}$$

由引理 3.3 和引理 3.4 可得

定理 3.7 如果 (E,A) 正则，则 (3.11) 的解为

$$\begin{aligned}H_k(t)\ &=e^{\hat{E}_k^d\hat{A}_k\tau}\hat{E}_k^d\hat{E}_kH_k(0)\\&+\int_0^\tau e^{\hat{E}_k^d\hat{A}_k(\tau-\theta)}\hat{E}_k^d\hat{G}_k(\theta)d\theta\\&-(I-\hat{E}_k\hat{E}_k^d)\sum_{i=0}^{h_k-1}(\hat{E}_k\hat{A}_k^d)^i\hat{A}_k^d\hat{G}_k^{(i)}(\tau),\end{aligned}$$

其中 $h_k=ind(E_k)$. 当 $k=0$ 时，

$H_k(0)=H_0(0)=(Y(0))=I-EE^d$,

当 $k\geq 1$ 时，

$$H_k(0)=\begin{pmatrix}Y(0)\\Y(1)\\\vdots\\Y(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I-\hat{E}_k\hat{E}_k^d\\H_{k-1}(1-0)\end{pmatrix}.$$

$\hat{G}_k(\theta)=(A_k+\lambda E_k)^{-1}G_k(\tau)$.

由式 (3.10) 和定理 3.7 可得

定理 3.8 如果 (E,A) 正则，则 (3.3) 的解为

$$
\begin{aligned}
Y(t) \quad &= I_{[t]} e^{\hat{E}_{[t]}^d \hat{A}_{[t]}(t-[t])} \\
&\times \hat{E}_{[t]}^d \hat{E}_{[t]} H_{[t]}(0) \\
&+ I_{[t]} \int_0^{t-[t]} e^{\hat{E}_{[t]}^d \hat{A}_{[t]}(t-[t]-\theta)} \\
&\times \hat{E}_{[t]}^d \hat{G}_{[t]}(\theta) d\theta - I_{[t]}(I - \hat{E}_{[t]} \hat{E}_{[t]}^d) \\
&\sum_{i=0}^{h_{[t]}-1} (\hat{E}_{[t]} \hat{A}_{[t]}^d)^i \hat{A}_{[t]}^d \hat{G}_{[t]}^{(i)}(t - [t]).
\end{aligned}
$$

由定理 3.6 和定理 3.8 得

定理 3.9 如果 (E,A) 正则，则 (3.3) 的解为

$$
\begin{aligned}
x(t) = \quad & \int_0^t I_{[t-s]} e^{\hat{E}_{[t-s]}^d \hat{A}_{[t-s]}(t-s-[t-s])} \hat{E}_{[t-s]} \hat{E}_{[t-s]}^d H_{[t-s]}(0) \\
& \times (I + E(I - EE^d))^{-1} f(s) ds \\
& + \int_0^t I_{[t-s]} (\int_0^{t-s-[t-s]} e^{\hat{E}_{[t-s]}^d \hat{A}_{[t-s]}(t-s-[t-s]-\theta)} \\
& \times hat E_{[t-s]}^d \hat{G}_{[t-s]}(\theta) d\theta) \\
& \times (I + E(I - EE^d))^{-1} f(s) ds \\
& - \int_0^t I_{[t-s]} (I - \hat{E}_{[t-s]} \hat{E}_{[t-s]}^d) \\
& \sum_{i=0}^{h_{[t-s]}-1} (\hat{E}_{[t-s]} \hat{A}_{[t-s]}^d)^i \\
& \times \hat{A}_{[t-s]}^d \hat{G}_{[t-s]}^{(i)}(t - s - [t - s]) \\
& \times (I + E(I - EE^d))^{-1} f(s) ds.
\end{aligned}
$$

下面再来讨论系统 (3.4) 的解.

可将其写成:

$$
\begin{cases}
E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) - C\dot{\varphi}(t-1), \\
\qquad\qquad 0 \leq t \leq 1, \\
E\dot{x}(t) + C\dot{x}(t-1) = Ax(t) + Bx(t-1), \\
\qquad\qquad t \geq 1, \\
x(t) = \varphi(t), \qquad -1 \leq t \leq 0.
\end{cases}
\tag{3.12}
$$

令 $u_k(\tau)=\begin{pmatrix} x(\tau) \\ x(1+\tau) \\ \vdots \\ x(k+\tau) \end{pmatrix}$, 显然

$$x(k+\tau)=I_k u_k(\tau), \tag{3.13}$$

$\tau\in[0,1)$. 从而系统 (3.12) 为

$$\begin{aligned} E_k\dot{u}_k(\tau)= & \ A_k u_k(\tau)+\begin{pmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\varphi(\tau-1) \\ & -\begin{pmatrix} C \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\dot{\varphi}(t-1). \end{aligned} \tag{3.14}$$

由引理 3.3 和引理 3.4 得

定理 3.10 如果 (E,A) 正则，则 (3.14) 的解为

$$\begin{aligned} u_k(\tau)= & \ e^{\hat{E}_k^d\hat{A}_k\tau}\hat{E}_k\hat{E}_k^d u_k(0) \\ & +\int_0^\tau e^{\hat{E}_k^d\hat{A}_k(\tau-\theta)}\hat{E}_k^d(col(B,0,\cdots,0)\varphi(\theta-1) \\ & -col(C,0,\cdots,0)\dot{\varphi}(\theta-1))d\theta-(I-\hat{E}_k\hat{E}_k^d) \\ & \sum_{i=0}^{h_k-1}(\hat{E}_k\hat{A}_k^d)^i\hat{A}_k^d(col(B,0,\cdots,0) \\ & \times\varphi^{(i)}(\tau-1)-col(C,0,\cdots,0)\varphi^{(i+1)}(\tau-1)), \end{aligned}$$

其中 $u_k(0)=\begin{pmatrix} x(0) \\ u_{k-1}(1-0) \end{pmatrix}$.

由定理 3.9 和式 (3.13) 得

定理 3.11 如果 (E,A) 正则，则 (3.4) 的解为

$$\begin{aligned} x(t)= \ & I_{[t]}e^{\hat{E}_{[t]}^d\hat{A}_{[t]}(t-[t])}\hat{E}_{[t]}\hat{E}_{[t]}^d u_{[t]}(0) \\ & +\int_0^{t-[t]} I_{[t]}e^{\hat{E}_{[t]}^d\hat{A}_{[t]}(t-[t]-\theta)} \\ & \times\hat{E}_{[t]}^d(col(B,0,\cdots,0)\varphi(\theta-1) \\ & -col(C,0,\cdots,0)\dot{\varphi}(\theta-1))d\theta \\ & -I_{[t]}(I-\hat{E}_{[t]}\hat{E}_{[t]}^d) \\ & \sum_{i=0}^{h_{[t]}-1}(\hat{E}_{[t]}\hat{A}_{[t]}^d)^i \\ & \times\hat{A}_{[t]}^d(col(B,o,\cdots,0)\varphi^{(i)}(t-[t]-1) \\ & -col(C,0,\cdots,0)\varphi^{(i+1)}(t-[t]-1)). \end{aligned}$$

最后我们给出系统 (3.1) 的常数变易公式和通解.

由引理 3.2, 定理 3.2 和定理 3.6 可得系统 (3.1) 的常数变易公式为

定理 3.12 如果 $x(t,\varphi,0)$ 为系统 (3.4) 的解，$X(t)$ 为系统 (3.2) 对应的基础解，$Y(t)$ 为系统 (3.3) 对应的基础解，则系统 (3.1) 的解为

$$\begin{aligned} x(t)= \ & x(t,\varphi,0)+\int_0^t X(t-s)E^d f(s)ds \\ & +\int_0^t Y(t-s)(I+E(I-EE^d))^{-1}f(s)ds. \end{aligned}$$

由引理 3.2, 定理 3.5, 定理 3.9 和定理 3.11 得

定理 3.13 如果 (E,A) 正则，则 (3.1) 的解为

$$
\begin{aligned}
x(t) = \ & \int_0^t I_{[t-s]} e^{\hat{E}^d_{[t-s]}\hat{A}_{[t-s]}(t-s-[t-s])} \hat{E}_{[t-s]}\hat{E}^d_{[t-s]}(Z_{[t-s]}(0)\hat{E}^d \\
& -H_{[t-s]}(0)(I+E(I-EE^d))^{-1})f(s)ds \\
& +\int_0^t I_{[t-s]}(\int_0^{t-s-[t-s]} e^{\hat{E}^d_{[t-s]}\hat{A}_{[t-s]}(t-s-[t-s]-\theta)} \\
& \times \hat{E}_{[t-s]}\hat{E}^d_{[t-s]}\hat{G}_{[t-s]}(\theta)d\theta)(I+E(I-EE^d))^{-1}f(s)ds \\
& -\int_0^t I_{[t-s]}(I-\hat{E}_{[t-s]}\hat{E}^d_{[t-s]}) \\
& \sum_{i=0}^{h_{[t-s]}-1} (\hat{E}_{[t-s]}\hat{A}^d_{[t-s]})^i \hat{A}^d_{[t-s]}\hat{G}^{(i)}_{[t-s]}(t-s-[t-s]) \\
& \times(I+E(I-EE^d))^{-1}f(s)ds \\
& +I_{[t]}e^{\hat{E}^d_{[t]}\hat{A}_{[t]}(t-[t])}\hat{E}_{[t]}\hat{E}^d_{[t]}u_{[t]}(0) \\
& +\int_0^{t-[t]} I_{[t]}e^{\hat{E}^d_{[t]}\hat{A}_{[t]}(t-[t]-\theta)}\hat{E}^d_{[t]}(col(B,0,\cdots,0) \\
& \times\varphi(\theta-1)-col(C,0,\cdots,0)\dot{\varphi}(\theta-1))d\theta \\
& -I_{[t]}(I-\hat{E}_{[t]}\hat{E}^d_{[t]}) \\
& \sum_{i=0}^{h_{[t]}-1} (\hat{E}_{[t]}\hat{A}^d_{[t]})^i \hat{A}^d_{[t]} \\
& \times col(B,o,\cdots,0)\varphi^{(i)}(t-[t]-1)-col(C,0,\cdots,0) \\
& \times\varphi^{(i+1)}(t-[t]-1)).
\end{aligned}
$$

§3.4　退化时滞差分系统的解

本节讨论具有时滞的退化差分系统，给出其初始函数的相容性条件，并给出其通解，最后举例说明之.

考虑退化时滞差分系统

$$
\begin{cases}
Ex(k+1) = Ax(k) + \sum\limits_{i=1}^{l} B_i x(k-i) + f(k), \\
\qquad (k = k_0, k_0+1, k_0+2, \cdots), \\
x(k) = \varphi(k), \\
\qquad (k = k_0, k_0-1, \cdots, k_0-l),
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

其中 $E, A, B_i(i = 1, 2, \cdots, l)$ 皆为 $n \times n$ 常数矩阵； l 为一个正整数， $det(E) = 0, \varphi(k) \in R^n(k = k_0, k_0-1, \cdots, k_0-l)$ 为给定的初始函数， $x(k) \in R^n$ 为状态变量， $f(k) \in R^n$ 为已知函数.

为介绍本节的主要结果，我们先给出一个引理.

引理 4.1 对退化差分系统

$$
Ex(k+1) = Ax(k) + f(k) \tag{4.2}
$$

如果 (E,A) 正则，则其通解为

$$
\begin{aligned}
x(k) &= (\hat{E}^d\hat{A})^k\hat{E}\hat{E}^d x(0) \\
&\quad + \hat{E}^d\sum_{j=1}^{k-1}(\hat{E}^d\hat{A})^{k-j-1}\hat{f}(j) \\
&\quad - (I - \hat{E}\hat{E}^d) \\
&\quad \sum_{j=1}^{h-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^j\hat{A}^d\hat{f}(k+j),
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\hat{E} &= (\lambda E + A)^{-1}E, \\
\hat{A} &= (\lambda E + A)^{-1}A, \hat{f}(k+j) \\
&= (\lambda E + A)^{-1}f(k+j), \\
h &= ind(E).x(k)
\end{aligned}
$$

的值与 λ 的取值无关. 且系统的初始条件应受下式约束

$$x(0) = \hat{E}\hat{E}^d x(0) - (I - \hat{E}\hat{E}^d)\sum_{j=1}^{h-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^j \hat{A}^d \hat{f}(j).$$

该引理的证明可参阅文献 [9].

定理 4.1　如果 (**E**,**A**) 正则, 则 (4.1) 的初始函数 $\varphi(k)$ 的相容性条件为

$$\begin{aligned}\varphi(k_0) = \ & \hat{E}\hat{E}^d\varphi(k_0) - (I - \hat{E}\hat{E}^d)\sum_{j=0}^{h-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^j \hat{A}^d \\ & \times(\sum_{i=1}^{l}\hat{B}_i\varphi(k_0 - i) + \hat{f}(k_0 + j)),\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $\hat{E} = (\lambda E + A)^{-1}E$, $\hat{A} = (\lambda E + A)^{-1}A$, $\hat{f}(k_0 + j) = (\lambda E + A)^{-1}f(k_0 + j)$, $\hat{B}_i = (\lambda E + A)^{-1}B_i, (i = 1, 2, \cdots, l)$, $h = ind(E)$.

证明: 考虑系统

$$\begin{cases} E\overline{x}(k+1) = A\overline{x}(k) + \sum_{i=1}^{l} B_i\varphi(k_0 - i) + f(k_0 + k), \\ \overline{x}(k) = \varphi(k_0). \end{cases} \tag{4.5}$$

显然系统 (4.5) 中如果令 $\overline{x}(k) = x(k + k_0)$, 则在 $k = 0$ 时, 系统 (4.5) 与系统 (4.1) 是等价的. 由引理 4.1 得系统 (4.5) 的初始函数相容性条件为

$$\begin{aligned}\overline{x}(0) = \ & \hat{E}\hat{E}^d\overline{x}(0) - (I - \hat{E}\hat{E}^d)\sum_{j=0}^{h-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^j \\ & \times\hat{A}^d(\sum_{i=1}^{l}\hat{B}_i\varphi(k_0 - i) + \hat{f}(k_0 + j)).\end{aligned} \tag{4.6}$$

由 $\overline{x}(k) = x(k + k_0)$ 得 $\overline{x}(0) = x(k_0) = \varphi(k_0)$, 代入 (4.6) 即得条件 (4.4) 成立, 定理 4.1 证毕.

下面我们将系统 (4.1) 用另一种形式来描述

设

$$y(k)=\begin{pmatrix} x(k+k_0) \\ x(k+k_0-1) \\ \vdots \\ x(k+k_0-l) \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

$$E_l=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$A_l=\begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 & \cdots & B_{l-1} & B_l \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix},$$

$F(k)=col(f(k+k_0),0,\cdots,0)\in R^{n(l+1)}$,

$I_l=(I,0,\cdots,0)\in R^{n\times n(l+1)}$.

则有

$$x(k+k_0)=I_ky(k). \tag{4.8}$$

这样系统 (4.1) 就可写作

$$E_ly(k+1)=A_ly(k)+F(k). \tag{4.9}$$

引理 4.2

$$ind(E_l) = ind(E) = h, \tag{4.10}$$

而且 $E_l^d = \begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}$.

证明：设

$$\overline{E}_l = \begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}.$$

则有

$$\begin{aligned} E_l\overline{E}_l &= \begin{pmatrix} E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} EE^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} E^dE & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}$$

$$= \overline{E}_l E_l$$

$$\overline{E}_l E_l \overline{E}_l$$

$$= \begin{pmatrix} E^dEE^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}$$

$$= \overline{E}_l$$

而且，我们还有

$$(I - E_l\overline{E}_l)E_l^h = \begin{pmatrix} I - EE^d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^h & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (I-EE^d)E^h & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=0\ ,$$

故由 D- 逆阵的定义可得，$E_l^d=\overline{E}_l$, 且 $ind(E_l)=ind(E)=h$. 引理 4.2 得证.

引理 4.3　如果存在数 λ 使

$$|\lambda^{l+1}E-A\lambda^l-B_1\lambda^{l-1}-\cdots-\lambda B_{l-1}-B_l|\neq 0,$$

则 (E_l, A_l) 为正则的.

证明:

$$|\lambda E_l-A_l|$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda E-A & -B_1 & -B_2 & \cdots & -B_{l-1} & -B_l \\ -I & \lambda I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I & \lambda I & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I & \lambda I \end{vmatrix}$$

$$=\pm\begin{vmatrix} \lambda^2E-A\lambda-B_1 & -B_2 & -B_3 & \cdots & -B_{l-1} & -B_l \\ -I & \lambda I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I & \lambda I & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I & \lambda I \end{vmatrix}$$

$$
= \pm \begin{vmatrix} \lambda^3 E - A\lambda^2 - B_1\lambda - B_2 & -B_3 & -B_4 & \cdots & -B_{l-1} & -B_l \\ -I & \lambda I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I & \lambda I & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I & \lambda I \end{vmatrix}
$$

$$
= \cdots
$$

$$
= \pm|\lambda^{l+1}E - A\lambda^l - B_1\lambda^{l-1} - \cdots - \lambda B_{l-1} - B_l| \neq 0,
$$

引理 4.3 证毕.

定理 4.2 退化时滞差分系统 (4.1) 中，如果存在 λ 使得

$$
|\lambda^{l+1}E - A\lambda^l - B_1\lambda^{l-1} - \cdots - \lambda B_{l-1} - B_l| \neq 0,
$$

则其解为

$$
\begin{aligned}
x(k) = \; & I_l(\hat{E}_l^d\hat{A}_l)^{k-k_0}\hat{E}_l\hat{E}_l^d(\varphi(k_0), \varphi(k_0-1), \cdots, \\
& \varphi(k_0-l))^T \\
& + I_l\hat{E}_l^d\sum_{j=0}^{k-k_0-1}(\hat{E}_l^d\hat{A}_l)^{k-k_0-j-1}\hat{f}_l(j) \\
& - I_l(I-\hat{E}_l\hat{E}_l^d)\sum_{j=0}^{h-1}(\hat{E}_l\hat{A}_l^d)^j\hat{A}_l^d\hat{f}_l(k-k_0+j).
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

证明：由于存在 λ 使得 $|\lambda^{l+1}E - A\lambda^l - B_1\lambda^{l-1} - \cdots - \lambda B_{l-1} - B_l| \neq 0$, 由引理 4.3 得 (E_l, A_l) 为正则的，又由引理 4.2 得 $ind(E_l) = ind(E) = h$. 再由引理 4.1 得系统 (4.9) 的解为

$$
\begin{aligned}
y(k) = \; & (\hat{E}_l^d\hat{A}_l)^k\hat{E}_l\hat{E}_l^d y(0) + \hat{E}_l^d\sum_{j=0}^{k-1}(\hat{E}_l^d\hat{A}_l)^{k-j-1}\hat{f}_l(j) \\
& -(I-\hat{E}_l\hat{E}_l^d)\sum_{j=0}^{h-1}(\hat{E}_l\hat{A}_l^d)^j\hat{A}_l^d\hat{f}_l(k+j).
\end{aligned}
$$

由 (4.8) 得

$$
\begin{aligned}
x(k+k_0)= \; & I_l(\hat{E}_l^d\hat{A}_l)^k\hat{E}_l\hat{E}_l^d y(0)+I_l\hat{E}_l^d\sum_{j=0}^{k-1}(\hat{E}_l^d\hat{A}_l)^{k-j-1}\hat{f}_l(j) \\
& -I_l(I-\hat{E}_l\hat{E}_l^d)\sum_{j=0}^{h-1}(\hat{E}_l\hat{A}_l^d)^j\hat{A}_l^d\hat{f}_l(k+j),
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
x(k)= \; & I_l(\hat{E}_l^d\hat{A}_l)^{k-k_0}\hat{E}_l\hat{E}_l^d(\varphi(k_0),\varphi(k_0-1),\cdots,\varphi(k_0-l))^T \\
& +I_l\hat{E}_l^d\sum_{j=0}^{k-k_0-1}(\hat{E}_l^d\hat{A}_l)^{k-k_0-j-1}\hat{f}_l(j) \\
& -I_l(I-\hat{E}_l\hat{E}_l^d)\sum_{j=0}^{h-1}(\hat{E}_l\hat{A}_l^d)^j\hat{A}_l^d\hat{f}_l(k-k_0+j).
\end{aligned}
$$

定理 4.2 证毕.

下面我们来举例说明本节主要结果的应用.

例 4.1　考虑二维时滞差分系统:

$$
\begin{cases}
x_1(k+1)=x_1(k-1)+x_2(k-1)+1, \\
0=x_2(k)+x_2x(k-1)-1, \\
\varphi(0)=\begin{pmatrix}\varphi_1(0)\\ \varphi_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, \\
\varphi(-1)=\begin{pmatrix}\varphi_1(-1)\\ \varphi_2(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.
\end{cases}
\tag{4.12}
$$

对照系统 (4.1) 可得

$$
x(k)=\begin{pmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},
$$

$$
B \;=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},
$$

$$f(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, ind(E) = 1.$$

从而我们有

$$(\lambda E + A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

取 $\lambda = 1$ 得

$$\hat{E} = (\lambda E + A)^{-1}E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = (\lambda E + A)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = (\lambda E + A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{f}(k) = (\lambda E + A)^{-1}f(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

这样，如果取 $k_0 = 0$, 我们得

$$\begin{aligned}
&\hat{E}\hat{E}^d\varphi(k_0) - (I - \hat{E}\hat{E}^d)\sum_{j=0}^{h-1}(\hat{E}\hat{A}^d)^j\hat{A}^d \\
&\quad \times(\sum_{i=1}^{l}\hat{B}_i\varphi(k_0 - i) + \hat{f}(k_0 + j)) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi(0) = \varphi(k_0),
\end{aligned}$$

即 (4.4) 成立. 由定理 4.1 得，初始函数 $\varphi(k)$ 是相容的. 又由于

$$|\lambda^2E-A\lambda-B|=\begin{vmatrix}\lambda^2-1 & -1\\ 0 & -\lambda-1\end{vmatrix}=-(\lambda^2-1)(\lambda+1),$$

取 $\lambda=0$, 得

$$|\lambda^2E-A\lambda-B|=1\neq 0.$$

又

$$E_l=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$A_l=\begin{pmatrix}A & B\\ I & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$F_l=col(1,-1,0,0)$,

取 $\lambda_1=0$, 则我们有

$$\hat{E}_l=(\lambda_1E_l+A_l)^{-1}E_l=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_l=(\lambda_1E_l+A_l)^{-1}A_l=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\hat{f}_l(k) = (\lambda E_l + A_l)^{-1}F_l(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

显然 $\hat{A}_l^d = I$, 又

$$\hat{E}_l = T_l \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_l^{-1},$$

其中

$$T_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$\hat{E}_l^d = T_l \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_l^{-1},$$

由定理 4.2 得系统 (4.12) 的解为

$$x(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(5+3(-1)^k) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j-1}(k-j-1) + \frac{3}{4}k \\ \frac{1}{2}(1+(-1)^k) \end{pmatrix}.$$

第四章　退化时滞微分系统的稳定性和周期解

系统的稳定性是诸如管理系统、电力系统、工业工程系统等等实际系统的一个重要性能指标. 近年来，已引起了各方面的广泛关注，并取得了许多重要成果. 但是，关于退化时滞微分系统的稳定性问题，结果却寥寥无几. 因而在本章中，我们将对其作深入讨论.

本章共分四节，分别介绍退化时滞微分系统的稳定性的 V- 泛函方法和全时滞稳定的代数判据，并讨论退化时滞微分系统周期解的存在性问题.

§4.1　退化时滞微分系统稳定性的 V- 泛函方法

在本节中，我们首先对于一般的自治退化时滞微分系统的稳定性给出其 V- 泛函判定定理. 然后对一种特殊的退化时滞微分系统，即差分微分系统与差分系统的混合系统，给出一个具体的 V- 泛函和相应的定理，并举例说明其应用. 最后，对二维退化时滞微分系统，给出一类 V- 泛函存在的充要条件.

首先考虑一般的自治退化时滞微分系统

$$E\dot{x}(t) = f(x_t), \tag{1.1}$$

这里

$f(\varphi) = C(\bar{C}, R^n), \bar{C} = C([-r,0], R^n)$，而且 $f(0) = 0$, $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-r,0]; E \in R^{n\times n}$, 且 $|E| = 0$. 对于 $\varphi \in \bar{C}$, 我们定义其范数

$$||\varphi|| = \sup_{\theta\in[-r,0]} |\varphi(\theta)|.$$

定义 1.1 **如果 $V(\varphi)\bar{C} \to R$ 为一个纯量的实值泛函，具有连续的偏导数，而且 $V(0) = 0$, 则称 $V(\varphi)$ 为一个 Liapunov 泛函，简称为 V- 泛函.**

定义 1.2 对于任何 $\varphi \in \bar{C}$, 如果 $V(\varphi) \geq 0$($V(\varphi) \leq 0$), 则称 $V(\varphi)$ 为半定正泛函 (半定负泛函). 半定正泛函和半定负泛函通称为半定号泛函.

定义 1.3 对于任何非零的 $\varphi \in \bar{C}$, 如果 $V(\varphi) > 0$($V(\varphi) < 0$), 则称 $V(\varphi)$ 为定正泛函 (定负泛函). 定正泛函和定负泛函通称为定号泛函.

定理 1.1 对于系统 (1.1), 如果存在一个定号的 V- 泛函，使得 $\dot{V}_{(1.1)}(\varphi)$ 为一个与 $V(\varphi)$ 符号相反的半定号泛函或恒等于零，则系统 (1.1) 的解是稳定的.

证明：我们不妨设 $V(\varphi)$ 是正定的，于是对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $||\varphi|| \geq \varepsilon, \varphi \in \bar{C}$ 时， $V(\varphi) \geq \eta(\varepsilon)$. 又由 V 的连续性和 $V(0) = 0$, 对 $\eta(\varepsilon)$, 存在一个 $\delta > 0$，使得当 $||\varphi|| \leq \delta$ 时，$V(\varphi) < \frac{1}{2}\eta(\varepsilon)$. 显然 $\delta < \varepsilon$.

取 $x_{t_0} \in \bar{C}$, $||x_{t_0}|| \leq \delta$, 又设 $x(t)$ 为系统 (1.1) 的满足条件 $x(t_0+\theta) = x_{t_0}$ 的解，则当 $t \geq t_0$ 时， $||x_t|| < \varepsilon$. 如若不然，则存在 $t^* > t_0$ 使得当 $t \in [t_0, t^*)$ 时， $||x_t|| < \varepsilon$，而 $||x_t^*|| = \varepsilon$. 于是我

们有

$$\begin{aligned}\eta(\varepsilon) &\le V(x_{t^*}) = V(x_{t_0}) + \int_{t_0}^{t^*} \tfrac{dV}{dt} dt \\ &\le V(x_{t_0}) < \tfrac{1}{2}\eta(\varepsilon).\end{aligned}$$

矛盾. 故 $\|x_t\| < \varepsilon$, 这样 $|x(t)| \le \|x_t\| < \epsilon$, 即系统 (1.1) 的零解是稳定的.

定理 1.2　对于系统 (1.1), 如果存在一个定号的 V- 泛函, 使得 $\dot{V}_{(1.1)}(\varphi)$ 为一个与 $V(\varphi)$ 符号相反的定号泛函, 则系统 (1.1) 的解是渐近稳定的.

证明: 不妨设 $V(\varphi)$ 为一个正定的泛函, 由假设当 $x_t \in \bar{C}$ 时, $\dot{V}_{(1.1)}(x_t)$ 定负. 由定理 1.1 知, 系统 (1.1) 的零解是稳定的. 这时必存在 $\delta_0 > 0$, 使得对任何 $x_{t_0} \in \bar{C}$, $\|x_{t_0}\| < \delta$, 系统 (1.1) 满足初始条件 x_{t_0} 的解 $x(t)$, 具有性质

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0.$$

否则, 任给 $\delta > 0$, 存在 $x_{t_0} \in \bar{C}$, $\|x_{t_0}\| \le \delta$ 和一个数列 $\{t_m\}$, 使得系统 (1.1) 满足初始条件 x_{t_0} 的解, 具有性质

$$\lim_{m\to\infty} |x(t_m)| = H > 0.$$

从而

$$\lim_{m\to\infty} \|x_{t_m}\| \ge H > 0.$$

令 $V(t) = V(x_t)$, 则 $V(t)$ 为 t 的单调减少函数, 所以我们有

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{m\to\infty} V(t_m) = c_0 > 0.$$

故存在充分大的 $T > t_0$, 使得当 $t \ge T$ 时, $V(t) \ge \frac{1}{2}c_0$.

由于 V 是正定的, 存在一个 $\alpha > 0$, 使得对 $t \ge T$, 有 $\|x_t\| \ge \alpha$. 又因为 $\dot{V}_{(1.1)}(t)$ 是负定的, 存在 $c^* > 0$, 使得

$$\frac{dV(t)}{dt} \le -c^*, \qquad t \ge T.$$

故

$$V(t) \le V(T) - c^*(t-T), \qquad t \ge T.$$

取 $t^* = \max\{T, T + \frac{1}{c^*}V(T)\}$，则我们有当 $t > t^*$ 时，$V(t) < 0$，这是不可能的．定理证毕．

我们再考虑退化时滞微分系统

$$\bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}\bar{x}(t-1) \tag{1.2}$$

这里 $\bar{E}, \bar{A}, \bar{B} \in R^{n\times n}$ 为常数矩阵，$|\bar{E}| = 0, \bar{x}(t) \in R^n$.

我们知道，当 $(\bar{E}, \bar{A})$ 为正则时，可通过变换，得到与系统 (1.2) 等价的系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_{11}x_1(t-1) + B_{12}x_2(t-1), \\ N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_{21}x_1(t-1) + B_{22}x_2(t-1), \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $x_1(t) \in R^{n_1}, x_2(t) \in R^{n_2}, n_1 + n_2 = n; A_1, B_{11} \in R^{n_1\times n_1}$; $B_{22} \in R^{n_2\times n_2}; B_{12} \in R^{n_1\times n_2}, B_{21} \in R^{n_2\times n_1}, N \in R^{n_2\times n_2}$, N 为幂零矩阵.

在系统 (1.3) 中，特别令人感兴趣的是 $N = 0$ 时的情形．这时系统 (1.3) 就为微分差分系统与差分系统的混合系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_{11}x_1(t-1) + B_{12}x_2(t-1), \\ x_2(t) = -B_{21}x_1(t-1) - B_{22}x_2(t-1), \end{cases} \tag{1.4}$$

我们知道，对孤立的差分微分系统和孤立的差分系统的稳定性，目前已有许多成果，而对 (1.4) 中 $B_{12} \neq 0, B_{22} \neq 0$ 的情形，即混合系统的稳定性尚需认真讨论．下面我们将给出其稳定性的有效判定定理．

我们设

$$E=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$
$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

这样，系统 (1.4) 就可写作

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-1). \tag{1.5}$$

设

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

为一个半正定的矩阵，而

$$D=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

为一个正定的矩阵. 并设

$$V(\varphi)=\varphi'(0)E'CE\varphi(0)+\int_{-1}^{0}\varphi'(\theta)D\varphi(\theta)d\theta, \tag{1.6}$$

这里 " ′ " 表示转置.

由系统 (1.4), 我们得

$$x_2(t)=\bar{F}x(t-1),$$

这里 $\bar{F}=-(0,I)B$. 这样我们有

$$x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \bar{F} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x(t-1) \end{pmatrix}.$$

设

$$F = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \bar{F} \end{pmatrix}, \qquad y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x(t-1) \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

这样 $x(t) = Fy(t)$, $x(t-1) = (0, I)y(t)$.

由 (1.6) 我们有

$$V(x_t) = x'(t)E'CEx(t) + \int_{-1}^{0} x'(t+\theta)Dx(t+\theta)d\theta,$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{(1.5)}(x_t) \quad &= (E\dot{x}(t))'CEx(t) + x'(t)E'C(E\dot{x}(t)) \\
&\quad +x'(t)Dx(t) - x'(t-1)Dx(t-1) \\
&= (Ax(t) + Bx(t-1))'CEx(t) \\
&\quad +x'(t)E'C(Ax(t) + Bx(t-1)) \\
&\quad +x'(t)Dx(t) \\
&\quad -x'(t-1)Dx(t-1) \\
&= x'(t)(A'CE + E'CA + D)x(t) \\
&\quad +x'(t)E'CBx(t-1) \\
&\quad +x'(t-1)B'CEx(t) - x'(t-1)Dx(t-1) \\
&= y'(t)F'(A'CE + E'CA + D)Fy(t) \\
&\quad +y'(t)F'E'CB(0, I)y(t) \\
&\quad +y'(t)\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} B'CEFy(t) \\
&\quad -y'(t)\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} D(0, I)y(t) \\
&= y'(t)(F'(A'CE + E'CA + D)F + F'E'CB(0, I) \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} B'CEF - \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} D(0, I)y(t).
\end{aligned}$$

我们设

$$
\begin{aligned}
W = \ & F'(A'CE+E'CA+D)F \\
& +F'E'CB(0,I)+\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} B'CEF \\
& -\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} D(0,I),
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

则由定理 1.1 和定理 1.2 得

定理 1.3　如果存在一个半正定的矩阵 C 和一个正定的矩阵 D, 使 W 为一个半负定的矩阵 (负定矩阵), 则系统 (1.2) 的零解是稳定的 (渐近稳定的).

事实上, 对系统 (1.5), 如果 W 为一个负定矩阵, $y'(t)Wy(t)$ 必为一个负定的泛函. 如若不然, 如果存在系统 (1.5) 的一个非零解 $x(t)$, 使得

$$
(x_1'(t), x_1'(t-1), x_2'(t-1))W(x_1'(t), x_1'(t-1), x_2'(t-1))' = 0
$$

由于 W 为负定矩阵, 我们有 $x_1(t)=0$, 且 $x_1(t-1)=0, x_2(t-1)=0$. 由 (1.4) 得 $x_2(t) = -B_{21}x_1(t-1) - B_{22}x_2(t-1) = -B_{21}0 - B_{22}0 = 0$, 即 $x(t) = (x_1'(t), x_2'(t))' = 0$. 这与 $x(t)$ 非零矛盾.

下面我们给出例题, 说明定理 1.3 的应用.

例 1.1　讨论二维系统

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = -x_1(t), \\
0 = x_2(t) - \frac{1}{2}x_2(t-1)
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

的稳定性.

对照系统 (1.5), 我们有

$$
E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},
$$

则

$$\bar{F} = -(0, I)B = (0, \frac{1}{2}), F = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \bar{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

设 $C = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则由 (1.8), 我们有

$$\begin{aligned} W \;=& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ & + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \left. + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

显然， W 为负定的. 由定理 1.3 得，系统 (1.9) 的零解是渐近稳定的.

事实上，系统 (1.9) 的解为

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t}x_1(0), \\ x_2(t) = (\frac{1}{2})^{[t]}x_2(t-[t]). \end{cases}$$

显然，当 $t \to \infty$ 时， $x(t) \to 0$. 这与例 1.1 的结果是一致的.

例 1.2　讨论三维混合系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \frac{1}{2}x_1(t-1) + \frac{1}{2}x_2(t-1), \\ x_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1(t-1), \\ x_3(t) = \frac{1}{4}x_2(t-1) + \frac{1}{2}x_3(t-1). \end{cases} \tag{1.10}$$

对照系统 (1.5) 得

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

从而我们有

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

取 $C = D = I$, 由 (1.8) 得

$$
\begin{aligned}
W &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{15}{16} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} \end{pmatrix},
$$

显然 W 为负定的. 由定理 1.3 得系统 (1.10) 的零解为渐近稳定的.

对于二维退化时滞微分系统, 我们可以得到一个简便的结果. 下面我们对此作讨论.

在系统 (1.3) 中, 如果 $n = 2$, 则必有 $N = 0$, 这时退化时滞微

分系统必为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) + b_{11}x_1(t-1) + b_{12}x_2(t-1), \\ 0 = x_2(t) + b_{21}x_1(t-1) + b_{22}x_2(t-1), \end{cases} \tag{1.11}$$

这里 $x_1(t), x_2(t)$ 均为纯量函数, $a, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ 均为纯数. 对照系统 (1.5), 我们有

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

而且

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

这时

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix}.$$

对任何常正矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

和任何定正矩阵

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

由 (1.8) 我们有

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -b_{21} \\ 0 & -b_{22} \end{pmatrix} \left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\Bigg)\\
&+\begin{pmatrix}d_{11}&d_{12}\\d_{21}&d_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-b_{21}&-b_{22}\end{pmatrix}\\
&+\begin{pmatrix}1&0\\0&-b_{21}\\0&-b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\\
&\times\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\\
&\times\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-b_{21}\\0&-b_{22}\end{pmatrix}\\
&-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{11}&d_{12}\\d_{21}&d_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}2ac_{11}+d_{11}&-b_{12}(c_{12}+d_{12})&-b_{22}(c_{12}+d_{12})\\-b_{12}(c_{12}+d_{12})&d_{22}b_{21}^2&d_{22}b_{21}b_{22}\\-b_{22}(c_{12}+d_{12})&d_{22}b_{21}b_{22}&d_{22}b_{22}^2\end{pmatrix}\\
&+\begin{pmatrix}0&c_{11}b_{11}+c_{12}b_{21}&c_{11}b_{12}+c_{12}b_{22}\\c_{11}b_{11}+c_{12}b_{21}&0&0\\c_{11}b_{12}+c_{12}b_{22}&0&0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{12} & d_{22} \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 2ac_{11}+d_{11} & c_{11}b_{11}-b_{21}d_{12} & c_{11}b_{12}-b_{22}d_{12} \\ c_{11}b_{11}-b_{21}d_{12} & d_{22}b_{21}^2-d_{11} & d_{22}b_{21}b_{22}-d_{12} \\ c_{11}b_{12}-b_{22}d_{12} & d_{22}b_{21}b_{22}-d_{12} & d_{22}(b_{22}^2-1) \end{pmatrix}
$$

于是我们有

定理 1.4 对二维退化时滞微分系统 (1.11), 形如 (1.6) 的 V-泛函存在的充分必要条件为, 存在常正矩阵 $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ 和定正矩阵 $D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$, 使得矩阵

$$
W=\begin{pmatrix} 2ac_{11}+d_{11} & c_{11}b_{11}-b_{21}d_{12} & c_{11}b_{12}-b_{22}d_{12} \\ c_{11}b_{11}-b_{21}d_{12} & d_{22}b_{21}^2-d_{11} & d_{22}b_{21}b_{22}-d_{12} \\ c_{11}b_{12}-b_{22}d_{12} & d_{22}b_{21}b_{22}-d_{12} & d_{22}(b_{22}^2-1) \end{pmatrix}
$$

定负.

一般地, 我们可以利用定理 1.4 对二维退化时滞微分系统的稳定性非常简单地直接进行验证.

例 1.3 对于例 1.1 的系统, 对照系统 (1.11) 我们有

$a=-1, b_{11}=b_{12}=b_{21}=0, b_{22}=-\frac{1}{2}$.

我们取

$$
C=D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

代入定理 1.4 的 W 可得

$$W = \begin{pmatrix} -2+1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & ((-\frac{1}{2})^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

W 显然为负定的，由定理 1.4 得，系统 (1.9) 的零解为渐进稳定的.

§4.2 二维退化时滞微分系统全时滞稳定性的代数判据

我们知道，全时滞稳定性是时滞微分系统所特有的性质. 文献 [1] 中对时滞系统的全时滞稳定性作了深入研究，并重提了 A.A. AHupoHob 公开问题：是否存在全时滞稳定的代数判据，并就一维系统作了肯定的回答. 本节就退化时滞微分系统，给出其全时滞稳定的判据，特别对二维退化时滞微分系统，给出其全时滞稳定的代数判据，并举例说明其应用. 所考虑的系统当然假定其解是存在的.

为叙述和证明本节的主要结果，作为引理，我们首先给出文献 [9] 中的一个定理

引理 2.1 退化系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t),$$

当且仅当特征方程

$$h(\lambda,\tau)=|\lambda E-A|=0$$

的根全在复平面左半平面时 (即每一个特征根实部全为负), 该系统是渐近稳定的.

下面我们再对退化时滞微分系统给出全时滞稳定的概念:

定义 2.1 对于退化时滞微分系统

$$E\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)), \tag{2.1}$$

(其中 $x\in R^n, E\in R^{n\times n}, |E|=0; \tau\in R_+$ 为参数.) 若对任意的 $\tau\in R_+$, 系统 (2.1) 的零解都是渐近稳定的, 则称系统 (2.1) 零解为全时滞稳定的, 或者称系统 (2.1) 是全时滞稳定的.

对于 n 维退化时滞微分系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau), \tag{2.2}$$

其中 $x\in R^n, E, A, B\in R^{n\times n}, |E|=0; \tau\in R_+$ 为参数. 我们有

定理 2.1 退化时滞微分系统 (2.2) 为全时滞稳定的充要条件是特征方程

$$h(\lambda,\tau)=|\lambda E-A-Be^{-\lambda\tau}|$$

满足条件

(*i*) $h(\lambda,0)=|\lambda E-A-B|=0$ 的根皆具负实部;

(*ii*) 对任意的 $y\in R$ 和任意的 $\tau\in R_+$ 恒有

$$h(iy,\tau)=|iyE-A-Be^{-iy\tau}|\neq 0.$$

证明: 必要性, 如果 (*i*) 不成立, 则由引理 2.1 得, $\tau=0$ 时系统 (2.2) 零解不是渐近稳定的, 这与 (2.2) 是全时滞稳定相矛盾, 故 (*i*) 成立.

如果 (ii) 不成立，则存在 $y_1 \in R$ 和 $\tau_1 \in R_+$ 有

$$h(iy_1, \tau_1) = |iy_1 E - A - Be^{-iy_1\tau_1}| = 0,$$

则系统 (2.2) 在 $\tau = \tau_1$ 时有解 $x(t) = e^{iy_1 t}x(0)$, 不是渐近稳定的，这与 (2.2) 为全时滞稳定矛盾，故 (ii) 成立.

充分性：只需证明对任意 $\tau \in R_+$, (2.2) 的所有特征根皆具有负实部.

设 $l = ind(E)$, 则可把 $h(\lambda,\tau)$ 展开为 λ 的多项式

$$h(\lambda,\tau) = A_0\lambda^l + A_1\lambda^{l-1} + \cdots\cdots + A_l = 0$$

其中 $A_i \quad (i = 0,1,2,\cdots,l)$ 为 $e^{-\lambda\tau}$ 的多项式 (且 $A_0 \neq 0$), 由 E,A,B 的元 e_{ij}, a_{ij}, b_{ij} 组成的多项式系数.

当 $\tau \in R_+$ 及 $Re\lambda \geq 0$ 时有 $|e^{-\lambda\tau}| \leq 1$, 从而我们有当 $\tau \in R_+$ 及 $Re\lambda \geq 0$ 时 $|A_i|$ 有界，记

$$K_1 = \max_{1\leq i\leq l} \frac{|A_i|}{|A_0|} \qquad \tau \in R_+, Re\lambda \geq 0$$

再取 $R_1 = max(1,(l+1)K_1) > 0$, 则当 $|\lambda| \geq R_1, Re\lambda \geq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}|A_0\lambda^l + A_1\lambda^{l-1} + \cdots + A_l| &\geq |A_0|\lambda^l[1 - \tfrac{|A_1|}{|A_0|}\tfrac{1}{|\lambda|} - \cdots \\ &\quad - \tfrac{|A_l|}{|A_0|}\tfrac{1}{|\lambda|^l}] \\ &\geq R_1^l|A_0|[1 - \tfrac{lK_1}{(l+1)K_1}] > 0\end{aligned}$$

即在 $|\lambda| \geq R_1, Re\lambda \geq 0$ 时，对任意 $\tau \in R_+$, 特征方程

$$h(\lambda,\tau) = |\lambda E - A - Be^{-\lambda\tau}| = 0 \tag{2.3}$$

没有根.

由 (i) 得，当 $\tau = 0$ 时，(2.3) 的根都落在左半平面 $Re\lambda < 0$ 上. 当 τ 由 0 增加时，(2.3) 的根都落在左半平面 $Re\lambda < 0$ 上. 如

果 τ 由 0 增加时，根都不落在左半平面 $Re\lambda<0$ 上，当且仅当有某个 τ 使 λ 在 $-R_1$ 与 R_1 之间达到或穿过虚轴，而 (ii) 是不允许这样的，所以对任意 $\tau\in R_+$,(2.3) 的一切根随着 τ 的增加永远停留在左半平面 $Re\lambda<0$ 上．定理 2.1 证毕．

我们知道，定理 2.1 不是代数判据，特别是条件 (ii)，由于其超越性，很难验证．下面我们就 $n=2$ 时的情况给出其代数判据．

当 $n=2$ 时，我们可以通过代换将系统化为

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau), \tag{2.4}$$

其中

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix},\quad x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix},$$

$x_1(t)$,$x_2(t)$ 均为纯量函数， $\tau\in R_+$.

这样定理 2.1 的条件 (i) 即为

$$\begin{aligned}
&|\lambda E-A-B|\\
&\quad=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\right|\\
&\quad=\begin{vmatrix}\lambda-(a_{11}+b_{11})&-(a_{12}+b_{12})\\-(a_{21}+b_{21})&-(a_{22}+b_{22})\end{vmatrix}\\
&\quad=-(a_{22}+b_{22})\lambda+(a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22})\\
&\qquad-(a_{12}+b_{12})(a_{21}+b_{21})=0
\end{aligned}$$

的根皆具有负实部. 这就要求 $a_{22}+b_{22}\neq 0$, 且

$$\lambda=\frac{1}{a_{22}+b_{22}}\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}=\frac{1}{a_{22}+b_{22}}|A+B|<0.$$

即定理 2.1 的条件 (i) 可化为

$$\frac{1}{a_{22}+b_{22}}|A+B|<0. \tag{2.5}$$

再来考察定理 2.1 的条件 (ii)

$$\begin{aligned} h(iy,\quad \tau) \\ &=\left|\begin{pmatrix} iy-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right. \\ &\quad\left.\times(cos(y\tau)-isin(y\tau))\right| \\ &=[-a_{11}-b_{11}cos(y\tau)+i(y+b_{11}sin(y\tau))] \\ &\quad\times[-a_{22}-b_{22}cos(y\tau)+ib_{22}sin(y\tau)] \\ &\quad-[-a_{12}-b_{12}cos(y\tau)+ib_{12}sin(y\tau)] \\ &\quad\times[-a_{21}-b_{21}cos(y\tau)+ib_{21}sin(y\tau)]. \end{aligned}$$

令 $y\tau=\theta$ 则有

$$\begin{aligned} h(iy,\quad \tau) \\ &=[(a_{11}+b_{11}cos\theta)(a_{22}+b_{22}cos\theta) \\ &\quad-(y+b_{11}sin\theta)(b_{22}sin\theta) \\ &\quad+i((-a_{11}-b_{11}cos\theta)b_{22}sin\theta+(y+b_{11}sin\theta) \\ &\quad\times(-a_{22}-b_{22}cos\theta))]-[(a_{12}+b_{12}cos\theta)(a_{21}+b_{21}cos\theta) \\ &\quad-b_{12}b_{21}sin^2\theta)+i((-a_{12}-b_{12}cos\theta)b_{21}sin\theta \\ &\quad+b_{12}sin\theta(-a_{21}-b_{21}cos\theta))] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [(a_{11} + b_{11}cos\theta)(a_{22} + b_{22}cos\theta) - (y + b_{11}sin\theta)b_{22}sin\theta \\
&\quad -(a_{12} + b_{12}cos\theta)(a_{21} + b_{21}cos\theta) + b_{12}b_{21}sin^2\theta] \\
&\quad -i[(a_{11} + b_{11}cos\theta)b_{22}sin\theta + (y + b_{11}sin\theta) \\
&\quad \times(a_{22} + b_{22}cos\theta) - (a_{12} + b_{12}cos\theta)b_{21}sin\theta \\
&\quad -b_{12}sin\theta(a_{21} + b_{21}cos\theta)].
\end{aligned}
$$

显然

$$
\begin{aligned}
&Re(h(iy,\tau)) \\
&= (a_{11} + b_{11}cos\theta)(a_{22} + b_{22}cos\theta) - (y + b_{11}sin\theta)b_{22}sin\theta \\
&\quad -(a_{12} + b_{12}cos\theta)(a_{21} + b_{21}cos\theta) + b_{12}b_{21}sin^2\theta \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} + b_{11}a_{22} \\
&\quad -a_{21}b_{12})cos\theta + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})cos^2\theta \\
&\quad -yb_{22}sin\theta - (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})sin^2\theta \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&\quad + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) cos\theta \\
&\quad + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} cos^2\theta \\
&\quad -yb_{22}sin\theta - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} sin^2\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-Im(h(iy,\tau)) \\
&= (a_{11} + b_{11}cos\theta)b_{22}sin\theta + (y + b_{11}sin\theta)(a_{22} + b_{22}cos\theta) \\
&\quad -(a_{12} + b_{12}cos\theta)b_{21}sin\theta - b_{12}sin\theta(a_{21} + b_{21}cos\theta) \\
&= (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} + b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12})sin\theta \\
&\quad +(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})sin\theta cos\theta \\
&\quad +yb_{22}cos\theta + ya_{22}
\end{aligned}
$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) sin\theta$$

$$+ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} sin2\theta + yb_{22}cos\theta + ya_{22}.$$

令 $|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, 则我们有

$$Re(h(iy,\tau)) = |A| + |C|cos\theta + |B|cos2\theta - yb_{22}sin\theta,$$

$$-Im(h(iy,\tau)) = |C|sin\theta + |B|sin2\theta + yb_{22}cos\theta + ya_{22}.$$

$h(iy,\tau) \neq 0$, 即方程 $h(iy,\tau) = 0$ 无实根 y. 而 $h(iy,\tau) = 0$ 等价于

$$|C|sin\theta + |B|sin2\theta + yb_{22}cos\theta + ya_{22} = 0, \tag{2.6}$$

$$|C|cos\theta + |B|cos2\theta - yb_{22}sin\theta + |A| = 0. \tag{2.7}$$

由 (2.6) $\times$ $sin\theta$ + (2.7) $\times$ $cos\theta$ 得

$$|C| + (|A| + |B|)cos\theta + ya_{22}sin\theta = 0. \tag{2.8}$$

由 (2.6) $\times$ $con\theta$ − (2.7) $\times$ $sin\theta$ 得

$$|B|sin\theta + yb_{22} + ya_{22}cos\theta - |A|sin\theta = 0. \tag{2.9}$$

联立 (2.8) 和 (2.9) 得

$$\begin{cases} ya_{22}sin\theta + (|A| + |B|)cos\theta = -|C|, \\ (|A| - |B|)sin\theta - ya_{22}cos\theta = yb_{22}. \end{cases}$$

设

$$W = \begin{vmatrix} ya_{22} & (|A|+|B|) \\ (|A|-|B|) & -ya_{22} \end{vmatrix} = -(|A|^2-|B|^2)-y^2a_{22}^2,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} -|C| & (|A|+|B|) \\ yb_{22} & -ya_{22} \end{vmatrix} = (a_{22}|C|-b_{22}(|A|+|B|))y,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} ya_{22} & -|C| \\ (|A|-|B|) & yb_{22} \end{vmatrix} = y^2a_{22}b_{22}+|C|(|A|-|B|),$$

$$W sin\theta = W_1, W cos\theta = W_2,$$

故有 $\quad W_1^2+W_2^2=W^2$, 即

$$(a_{22}|C|-b_{22}(|A|+|B|))^2y^2+(y^2a_{22}b_{22}+|C|(|A|-|B|))^2$$
$$=((|A|^2-|B|^2)+y^2a_{22}^2)^2,$$

整理之得

$$a_{22}^2(b_{22}^2-a_{22}^2)y^4+[a_{22}^2|C|^2+b_{22}^2(|A|+|B|)^2$$
$$-4a_{22}b_{22}|C||B|-2a_{22}^2(|A|^2-|B|^2)]y^2$$
$$+|C|^2(|A|-|B|)^2-(|A|^2-|B|^2)^2=0.$$

令

$\alpha=a_{22}^2(b_{22}^2-a_{22}^2)$,
$\beta=a_{22}^2|C|^2+b_{22}^2(|A|+|B|)^2-4a_{22}b_{22}|C||B|-2a_{22}^2(|A|^2-|B|^2)$,
$\gamma=|C|^2(|A|-|B|)^2-(|A|^2-|B|^2)^2$,
则得方程

$$\alpha y^4+\beta y^2+\gamma=0, \tag{2.10}$$

要使方程 (2.10) 无实根，即有
1^0. 当 $\alpha=0$ 时，方程 (2.10) 变为

$$\beta y^2+\gamma=0,$$

要使其无实根，只需当 $\beta=0$ 时 $\gamma\neq 0$; 当 $\beta\neq 0$ 时，$\frac{\gamma}{\beta}>0$.

2^0. 当 $\alpha\neq 0$ 时，必须有

$\beta^2-4\alpha\gamma<0$ 或 $\begin{cases}\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0\\ \frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}<0\end{cases}$.

综上所述，我们有

定理 2.2 二维退化时滞微分系统 (2.4) 为全时滞稳定的充要条件是

(*i*) $\frac{1}{a_{22}+b_{22}}|A+B|<0$;

(*ii*) 如果 $\alpha=0$, 我们有当 $\beta=0$ 时 $\gamma\neq 0$; 当 $\beta\neq 0$ 时，$\frac{\gamma}{\beta}>0$;

如果 $\alpha\neq 0$, 我们有 $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ 或

$$\begin{cases}\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0,\\ \frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}<0,\end{cases}$$

其中

$\alpha=a_{22}^2(b_{22}^2-a_{22}^2)$,

$\beta=a_{22}^2|C|^2+b_{22}^2(|A|+|B|)^2-4a_{22}b_{22}|C||B|-2a_{22}^2(|A|^2-|B|^2)$,

$\gamma=|C|^2(|A|-|B|)^2-(|A|^2-|B|^2)^2$,

$|C|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$.

下面我们举例说明定理 2.2 的应用.

例 2.1 考虑二维退化时滞微分系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-x_1(t),\\ x_2(t)=\frac{1}{2}x_2(t-\tau),\end{cases}\tag{2.11}$$

的全时滞稳定性.

我们将其化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t), \\ 0 = x_2(t) - \frac{1}{2}x_2(t-\tau). \end{cases}$$

对照系统 (2.2), 有

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

从而我们有

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

(*i*) $\frac{1}{a_{22}+b_{22}}|A+B| = -1 < 0$,

(*ii*) $\alpha = -\frac{3}{4}, \beta = -\frac{3}{2}, \gamma = -\frac{3}{4}$,

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0, \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = -1 < 0.$$

故由定理 2.2 得，二维时滞微分系统 (2.11) 是全时滞稳定的.

事实上，当 $\tau = 0$ 时，系统 (2.11) 的解为

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t}x_1(0) \\ x_2(t) = 0 \end{cases}$$

当 $\tau \neq 0$ 时， (2.11) 的解为

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t}x_1(0), \\ x_2(t) = (\frac{1}{2})^{k-1}x_2(t - k\tau - \tau), \end{cases}$$

其中 $t - k\tau \leq 0$, 即 $k \geq \frac{t}{\tau}$. 有当 $t \to \infty$ 时， $k \to \infty$, 即系统 (2.11) 的解为渐近稳定的，故系统 (2.11) 为全时滞稳定的.

例 2.2　对于二维退化时滞微分系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t-\tau), \\ x_2(t) = -\frac{1}{4}x_1(t) - \frac{1}{4}x_1(t-\tau) - \frac{1}{2}x_2(t-\tau), \end{cases} \tag{2.12}$$

可将其化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t-\tau), \\ 0 = x_2(t) + \frac{1}{4}x_1(t) + \frac{1}{4}x_1(t-\tau) + \frac{1}{2}x_2(t-\tau), \end{cases}$$

比较系统 (2.4) 得

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

从而，我们有

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = -\frac{5}{8}.$$

$$(i) \quad \tfrac{1}{a_{22}+b_{22}}|A+B| = -\tfrac{7}{6} < 0,$$

$$(ii) \quad \alpha = -\tfrac{3}{4}, \beta = -\tfrac{363}{256}, \gamma = -\tfrac{98\times 28}{(64)^2},$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0,$$

$$\tfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} = -\tfrac{65799}{(64\times 4)^2} < 0,$$

故由定理 2.2 得，二维时滞微分系统 (2.12) 也是全时滞稳定的.

§4.3 三维退化时滞微分系统全时滞稳定性的代数判据

关于微分系统的全时滞稳定性问题，文献 [4] 给出了一些代数判据，但是我们注意到，它们中大多数都是超越的，不便使用. 在文献 [84] 中，黄文璋教授讨论了 n 阶常系数线性时滞微分方程

$$\overset{(n)}{x}(t)+\sum_{k=1}^{n}a_k\overset{(n-k)}{x}(t)+\sum_{k=1}^{n}b_k\overset{(n-k)}{x}(t-\tau)=0,$$

全时滞稳定的代数判据. 而在文献 [85] 中，廖晓昕教授则给出了超越函数

$$f_n(\lambda,e^{-\lambda\tau})\overset{\text{def}}{=}Det(a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau}-\delta_{ij}\lambda)_{n\times n}$$

零点全分布在复平面左半部的代数充分准则，从而讨论了 n 阶时滞微分系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$$

的全时滞稳定的代数判据. 这两篇论文在很大程度上解决了时滞微分系统全时滞稳定的代数判据问题.

但是，关于退化时滞微分系统的全时滞稳定的判据问题，目前成果不多. 我们在上一节中已经给出了二维退化时滞微分系统的全时滞稳定的代数判据问题. 而关于三维退化时滞微分系统的全时滞稳定性问题，则要复杂的多.

本节主要讨论形如

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)\tag{3.1}$$

的三维退化时滞微分系统的全时滞稳定的代数判据问题. 这里 $x \in R^3, E, A, B \in R^{3\times 3}, |E| = 0; \tau \in R_+$ 为参数. 当 $rank(E) = 1$ 时, 我们给出充分必要的代数判据, 当 $rank(E) = 2$ 时, 我们给出充分的代数判据. 最后, 我们给出两个例题说明本节主要结果的应用.

由定理 2.1, 我们有

定理 3.1 退化时滞微分系统 (3.1) 为全时滞稳定的充要条件是特征方程

$$h(\lambda,\tau) = |\lambda E - A - Be^{-\lambda\tau}| = 0 \tag{3.2}$$

满足条件

(*i*) $h(\lambda, 0) = |\lambda E - A - B| = 0$ 的根皆具负实部;

(*ii*) 对任意的 $y \in R$ 和任意的 $\tau \in R_+$ 恒有

$$h(iy,\tau) = |iyE - A - Be^{-iy\tau}| \neq 0. \tag{3.3}$$

对于三维退化时滞微分系统 (3.1), 我们分两种情况讨论之.

当 $rank(E) = 1$ 时, 可通过变换将系统化为

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \\ x_3(t-\tau) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们不妨仍设

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix},\qquad x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix},$$

则 (3.4) 仍可写作 (3.1).

当 $rank(E)=2$ 时，可通过变换将系统 (3.1) 化为

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\\\dot{x}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t-\tau)\\x_2(t-\tau)\\x_3(t-\tau)\end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

如果我们设

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix},\qquad x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix},$$

则 (3.5) 也仍可写作 (3.1).

我们首先来讨论系统 (3.4) 的全时滞稳定性问题.

对于三维退化时滞微分系统 (3.4), 我们有

$$h(\lambda,\tau)=|\lambda E-A-Be^{-\tau\lambda}|$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}-b_{11}e^{-\tau\lambda} & -a_{12}-b_{12}e^{-\tau\lambda} & -a_{13}-b_{13}e^{-\tau\lambda}\\ -a_{21}-b_{21}e^{-\tau\lambda} & -a_{22}-b_{22}e^{-\tau\lambda} & -a_{23}-b_{23}e^{-\tau\lambda}\\ -a_{31}-b_{31}e^{-\tau\lambda} & -a_{32}-b_{32}e^{-\tau\lambda} & -a_{33}-b_{33}e^{-\tau\lambda}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\left(\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\left(\begin{vmatrix}a_{22} & b_{23}\\ a_{32} & b_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{22} & a_{23}\\ b_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\right)e^{-\lambda\tau}\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix}b_{22} & b_{23}\\ b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}e^{-2\lambda\tau}\right)$$

$$-|A|-\left(\begin{vmatrix}b_{11} & a_{12} & a_{13}\\ b_{21} & a_{22} & a_{23}\\ b_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & b_{12} & a_{13}\\ a_{21} & b_{22} & a_{23}\\ a_{31} & b_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_{13}\\ a_{21} & a_{22} & b_{23}\\ a_{31} & a_{32} & b_{33}\end{vmatrix}\right)e^{-\lambda\tau}$$

$$-\left(\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & a_{13}\\ b_{21} & b_{22} & a_{23}\\ b_{31} & b_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11} & a_{12} & b_{13}\\ b_{21} & a_{22} & b_{23}\\ b_{31} & a_{32} & b_{33}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix}a_{11} & b_{12} & b_{13}\\ a_{21} & b_{22} & b_{23}\\ a_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}\right)e^{-2\lambda\tau}$$

$$-|B|e^{-3\lambda\tau}.$$

设

$$A_1=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & b_{23} \\ a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & a_{23} \\ b_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix};$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & b_{13} \\ b_{21} & a_{22} & b_{23} \\ b_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix};$$

这样，我们有

$$\begin{aligned} h(\lambda,\tau) = \lambda(A_1 + A_2 e^{-\lambda\tau} + A_3 e^{-2\lambda\tau}) - |A| \\ -B_1 e^{-\lambda\tau} - B_2 e^{-2\lambda\tau} \\ -|B| e^{-3\lambda\tau}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$h(\lambda,0) = \lambda(A_1 + A_2 + A_3) - |A| - |B| - B_1 - B_2. \tag{3.7}$$

由 (3.7) 得定理 3.1 的条件 (i) 为

$$\lambda = \frac{|A| + |B| + B_1 + B_2}{A_1 + A_2 + A_3} < 0,$$

即

$$(|A|+|B|+B_1+B_2)(A_1+A_2+A_3)<0, \tag{3.8}$$

设 $\lambda=iy,\quad -\lambda\tau=-iy\tau=i\theta$, 则我们有

$$\begin{aligned}
h(iy,\tau) \; &= iy(A_1+A_2(cos\theta+isin\theta)+A_3(cos2\theta+isin2\theta))\\
&\quad -|A|-B_1(cos\theta+isin\theta)\\
&\quad -B_2(cos2\theta+isin2\theta)-|B|(cos3\theta+isin3\theta)\\
&= -yA_2sin\theta-yA_3sin2\theta-|A|-B_1cos\theta\\
&\quad -B_2cos2\theta-|B|cos3\theta\\
&\quad +i(yA_1+yA_2cos\theta+yA_3cos2\theta-B_1sin\theta\\
&\quad -B_2sin2\theta-|B|sin3\theta).
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
U(y,\theta)= &\quad -y(A_2sin\theta+A_3sin2\theta)-|A|\\
&\quad -B_1cos\theta-B_2cos2\theta-|B|cos3\theta,\\
V(y,\theta)= &\quad y(A_1+A_2cos\theta+A_3cos2\theta)\\
&\quad -(B_1sin\theta+B_2sin2\theta+|B|sin3\theta),
\end{aligned}$$

则我们有 $h(iy,\tau)=U(y,\theta)+iV(y,\theta)$, 这样 $h(iy,\tau)=0$ 等价于

$$\left\{\begin{array}{l}
y(A_2sin\theta+A_3sin2\theta)=\\
\qquad -(|A|+B_1cos\theta+B_2cos2\theta+|B|cos3\theta),\\
y(A_1+A_2cos\theta+A_3cos2\theta)=\\
\qquad (B_1sin\theta+B_2sin2\theta+|B|sin3\theta).
\end{array}\right. \tag{3.9}$$

当 $A_2sin\theta+A_3sin2\theta=sin\theta(A_2+2A_3cos\theta)\neq 0$ 时，由 (3.9)

消去 y, 我们有

$$(A_1 + A_2cos\theta + A_3cos2\theta)(|A| + B_1cos\theta + B_2cos2\theta$$
$$+|B|cos3\theta) + (A_2sin\theta + A_3sin2\theta)(B_1sin\theta$$
$$+B_2sin2\theta + |B|sin3\theta) = 0,$$

从而有

$$A_1|A| + A_2B_1 + A_3B_2 + (A_1B_1 + A_2|A| + A_2B_2$$
$$+A_3B_1 + A_3|B|)\cos\theta$$
$$+(A_1B_2 + A_3|A| + A_2|B|)cos2\theta$$
$$+A_1|B|cos3\theta = 0,$$

由于 $cos2\theta = 2cos^2\theta - 1, cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$, 我们得

$$4A_1|B|cos^3\theta + 2(A_1B_2 + A_3|A| + A_2|B|)cos^2\theta$$
$$+(A_1B_1 + A_2|A| + A_2B_2 + A_3B_1$$
$$+A_3|B| - 3A_1|B|)cos\theta + A_1|A| + A_2B_1$$
$$+A_3B_2 - A_1B_2 - A_3|A| - A_2|B| = 0.$$

设

$$a_3 = 4A_1|B|,$$
$$a_2 = 2(A_1B_2 + A_3|A| + A_2|B|),$$
$$a_1 = A_1B_1 + A_2|A| + A_2B_2 + A_3B_1 + A_3|B| - 3A_1|B|,$$
$$a_0 = A_1|A| + A_2B_1 + A_3B_2 - A_1B_2 - A_3|A| - A_2|B|,$$

则我们有代数方程

$$a_3cos^3\theta + a_2cos^2\theta + a_1cos\theta + a_0 = 0.$$

设 $f(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$, 则上式为 $f(cos\theta) = 0$.

由此我们得出结论：当且仅当 $f(cos\theta) = 0$ 在 $[-1,1]$ 上无根时， $h(iy,\tau) \neq 0$.

如果 $A_2sin\theta + A_3sin2\theta = sin\theta(A_2 + 2A_3cos\theta) = 0$, 我们有两种情况： $sin\theta = 0$ 或者 $A_2 + 2A_3cos\theta$.

情况 I: 当 $sin\theta = 0$ 时，即 $\theta = k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 时，我们有

$$U(y,\theta) = -(|A| + (-1)^kB_1 + B_2 + (-1)^k|B|)$$
$$= -(|A| + B_2 + (-1)^k(B_1 + |B|)),$$
$$V(y,\theta) = y(A_1 + A_3 + (-1)^kA_2),$$

如 $k = 0$, 则 $y = -\frac{1}{\tau}\theta = -\frac{k}{\tau}\pi = 0, V(y,\theta) = 0$, 当且仅当 $|A| + B_1 + B_2 + |B| \neq 0$ 时， $h(iy,\tau) \neq 0$.

如 $k \neq 0$, 则 $y = -\frac{1}{\tau}\theta = -\frac{k}{\tau}\pi \neq 0$, 当且仅当 $|A| + B_2 + (-1)^k(B_1 + |B|) \neq 0$ 或者 $A_1 + A_3 + (-1)^kA_2 \neq 0$ 时， $h(iy,\tau) \neq 0$.

情况 II: 当 $A_2 + 2A_3cos\theta = 0$ 时，我们有

如果 $A_3 = 0$, 则 $A_2 = 0.h(iy,\tau) \neq 0$ 等价于

$$-U(y,\theta) = |A| + B_1cos\theta + B_2cos2\theta + |B|cos3\theta \neq 0$$

或者 $V(y,\theta) = yA_1 - (B_1sin\theta + B_2sin2\theta + |B|sin3\theta) \neq 0$.

由 (3.8) 得 $A_1 \neq 0$，这样可求得 y, 使得 $h(iy,\tau) \neq 0$, 故 $A_3 \neq 0$. 我们有 $cos\theta = -\frac{A_2}{2A_3}$, 即 $|\frac{A_2}{2A_3}| \leq 1$.

(i)　当 $2A_3 = A_2$ 时，我们有 $cos\theta = -1$, 则 $sin\theta = 0$, 从而

$$-U(y,\theta) = |A| - B_1 + B_2 - |B|,$$
$$V(y,\theta) = y(A_1 - A_2 + A_3) \quad (y\tau = \theta \neq 0),$$

即 $h(iy,\tau) \neq 0$ 等价于 $|A| - B_1 + B_2 - |B| \neq 0$ 或 $A_1 - A_2 + A_3 \neq 0$.

(ii)　当 $2A_3 = -A_2$ 时，我们有 $cos\theta = 1$, 则 $sin\theta = 0$, 从而

$$-U(y,\theta) = |A| + B_1 + B_2 + |B|,$$
$$V(y,\theta) = y(A_1 + A_2 + A_3) \quad (y\tau = \theta \neq 0),$$

即 $h(iy,\tau)\neq 0$ 等价于 $|A|+B_1+B_2+|B|\neq 0$ 或 $A_1+A_2+A_3\neq 0$. 这与 (3.8) 一致.

(*iii*) 当 $4A_3^2>A_2^2$ 时,

$\theta\neq k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots), sin\theta\neq 0$

我们有

$$
\begin{aligned}
-U(y,\theta) &= |A|-B_2+(B_1-3|B|)cos\theta+2B_2cos^2\theta \\
&\quad +4|B|cos^3\theta \\
&= |A|-B_2+(B_1-3|B|)(-\tfrac{A_2}{2A_3}) \\
&\quad +2B_2(-\tfrac{A_2}{2A_3})^2+4|B|(-\tfrac{A_2}{2A_3})^3 \\
&= \tfrac{1}{2A_3^3}(2(|A|-B_2)A_3^3-(B_1-3|B|)A_3^2A_2 \\
&\quad +B_2A_2^2A_3-|B|A_2^3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(y,\theta) &= y(A_1+A_2cos\theta+2A_3cos^2\theta-A_3) \\
&\quad -sin\theta(B_1+2B_2cos\theta \\
&\quad -|B|(-4sin^2\theta+3)) \\
&= y(A_1+A_2cos\theta+2A_3cos^2\theta-A_3) \\
&\quad -sin\theta(B_1+2B_2cos\theta+4|B|cos^2\theta-|B|) \\
&= y(A_1+A_2(-\tfrac{A_2}{2A_3})+2A_3(-\tfrac{A_2}{2A_3})^2-A_3) \\
&\quad -sin\theta(B_1+2B_2(-\tfrac{A_2}{2A_3})+4|B|(-\tfrac{A_2}{2A_3})^2-|B|) \\
&= y(A_1-A_3)-\tfrac{sin\theta}{A_3^2}((B_1-|B|)A_3^2 \\
&\quad -A_2A_3B_2+|B|A_2^2),
\end{aligned}
$$

故 $h(iy,\tau)\neq 0$ 等价于

$$2(|A|-B_2)A_3^3-(B_1-3|B|)A_3^2A_2+B_2A_2^2A_3-|B|A_2^3\neq 0,$$

或者 $A_1=A_2$ 且

$$(B_1-|B|)A_3^2-A_2A_3B_2+|B|A_2^2\neq 0.$$

综上所述，我们有

定理 3.2　退化时滞微分系统 (3.4) 为全时滞稳定的充要条件是:

(i)　$(|A| + |B| + B_1 + B_2)(A_1 + A_2 + A_3) < 0$,

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & b_{13} \\ b_{21} & a_{22} & b_{23} \\ b_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_2=\begin{vmatrix} a_{22} & b_{23} \\ a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{22} & a_{23} \\ b_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_3=\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

(ii) (a) $f(z)=a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$ 在 $[-1,1]$ 中无实根.

其中 $a_0=A_1|A|+A_2B_1+A_3B_2-A_1B_2-A_3|A|-A_2|B|$;

$a_1=(A_1B_1+A_2|A|+A_2B_2+A_3B_1+A_3|B|-3A_1|B|$;

$a_2=2(A_1B_2+A_3|A|+A_2|B|)$;

$a_3=4A_1|B|$.

(b) 对 $\theta=k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 有

$|A|+B_2\pm(B_1+|B|)\neq0$ 或 $A_1+A_3\pm A_2\neq0$;

(c) 对 $-2A_3cos\theta+A_2=0$, 有

当 $2A_3=A_2$ 时, $|A|-B_1+B_2-|B|\neq0$ 或 $A_1-A_2+A_3\neq0$;

当 $4A_3^2>A_2^2$ 时,

$2(|A|-B_2)A_3^3-(B_1-3|B|)A_3^2A_2+B_2A_2^2A_3-|B|A_2^3\neq0$,

或者

$A_1=A_2$ 且 $(B_1-|B|)A_3^2-A_2A_3B_2+|B|A_2^2\neq0$.

关于代数方程

$$f(z)=a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0 \tag{3.10}$$

在 $[-1,1]$ 中无实根的代数判据, 我们由文献 [4] 得

引理 3.1 代数方程 (3.10) 在 $[-1,1]$ 中无实根的充要条件为下列条件之一

(i) $H>0, f(1)f(-1)>0$;

(ii) $H=0, (\sqrt[3]{-4q}-\frac{a_2}{3a_3})^2>1, (\sqrt[3]{q/2}-\frac{a_2}{3a_3})^2>1$;

(iii) $H<0, a_3f(1)>0, a_3f(-1)>0, (\bar{z}_2)^2>1$;

(iv) $H<0, a_3f(1)<0, a_3f(-1)<0, (\bar{z}_1)^2>1$.

这里

$$H=a_1^2a_2^2-4a_1^3a_3-4a_0a_2^3+14a_0a_1a_2a_3-27a_0^2a_3^2,$$

$$q=\frac{27a_0a_3^2-9a_1a_2a_3+2a_2^3}{27a_3^2},$$

$$p=\frac{3a_1a_3-a_2^2}{3a_3^2},$$

$$\bar{z}_1=\frac{-a_2-\sqrt{a_2^2-3a_1a_3}}{3a_3},$$

$$\bar{z}_2=\frac{-a_2+\sqrt{a_2^2-3a_1a_3}}{3a_3}.$$

下面我们来讨论三维退化时滞微分系统 (3.5) 的全时滞稳定性问题. 为此，我们先给出一个引理:

引理 3.2 对于 n 次常系数代数方程 $f(z)=0$, 如果 $f(-1)\neq 0, f(1)\neq 0$ 而且

$$\{f(-1), f'(-1), \cdots, f^{(n)}(-1)\}$$

与 $\{f(1), f'(1), \cdots, f^{(n)}(1)\}$

改变符号的次数相同，则代数方程 $f(z)=0$ 在 $[-1,1]$ 中无实根.

对于三维退化时滞微分系统 (3.5), 我们有

$$h(\lambda,\tau)=|\lambda E-A-Be^{-\tau\lambda}|$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11}-b_{11}e^{-\tau\lambda} & -a_{12}-b_{12}e^{-\tau\lambda} & -a_{13}-b_{13}e^{-\tau\lambda} \\ -a_{21}-b_{21}e^{-\tau\lambda} & \lambda-a_{22}-b_{22}e^{-\tau\lambda} & -a_{23}-b_{23}e^{-\tau\lambda} \\ -a_{31}-b_{31}e^{-\tau\lambda} & -a_{32}-b_{32}e^{-\tau\lambda} & -a_{33}-b_{33}e^{-\tau\lambda} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda & -a_{12}-b_{12}e^{-\tau\lambda} & -a_{13}-b_{13}e^{-\tau\lambda} \\ 0 & \lambda-a_{22}-b_{22}e^{-\tau\lambda} & -a_{23}-b_{23}e^{-\tau\lambda} \\ 0 & -a_{32}-b_{32}e^{-\tau\lambda} & -a_{33}-b_{33}e^{-\tau\lambda} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} -a_{11}-b_{11}e^{-\tau\lambda} & -a_{12}-b_{12}e^{-\tau\lambda} & -a_{13}-b_{13}e^{-\tau\lambda} \\ -a_{21}-b_{21}e^{-\tau\lambda} & \lambda-a_{22}-b_{22}e^{-\tau\lambda} & -a_{23}-b_{23}e^{-\tau\lambda} \\ -a_{31}-b_{31}e^{-\tau\lambda} & -a_{32}-b_{32}e^{-\tau\lambda} & -a_{33}-b_{33}e^{-\tau\lambda} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\left(\begin{vmatrix} \lambda & -a_{23}-b_{23}e^{-\tau\lambda} \\ 0 & -a_{33}-b_{33}e^{-\tau\lambda} \end{vmatrix}\right. \\
&\quad \left. + \begin{vmatrix} -a_{22}-b_{22}e^{-\tau\lambda} & -a_{23}-b_{23}e^{-\tau\lambda} \\ -a_{32}-b_{32}e^{-\tau\lambda} & -a_{33}-b_{33}e^{-\tau\lambda} \end{vmatrix}\right) \\
&\quad + \begin{vmatrix} -a_{11}-b_{11}e^{-\tau\lambda} & 0 & -a_{13}-b_{13}e^{-\tau\lambda} \\ -a_{21}-b_{21}e^{-\tau\lambda} & \lambda & -a_{23}-b_{23}e^{-\tau\lambda} \\ -a_{31}-b_{31}e^{-\tau\lambda} & 0 & -a_{33}-b_{33}e^{-\tau\lambda} \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} -a_{11}-b_{11}e^{-\tau\lambda} & -a_{12}-b_{12}e^{-\tau\lambda} & -a_{13}-b_{13}e^{-\tau\lambda} \\ -a_{21}-b_{21}e^{-\tau\lambda} & -a_{22}-b_{22}e^{-\tau\lambda} & -a_{23}-b_{23}e^{-\tau\lambda} \\ -a_{31}-b_{31}e^{-\tau\lambda} & -a_{32}-b_{32}e^{-\tau\lambda} & -a_{33}-b_{33}e^{-\tau\lambda} \end{vmatrix} \\
&= -\lambda^2(a_{33}+b_{33}e^{-\tau\lambda}) \\
&\quad +\lambda\left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right. \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \left(\begin{vmatrix} a_{22} & b_{23} \\ a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}\right. \\
&\quad \left. + \begin{vmatrix} b_{22} & a_{23} \\ b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{13} \\ a_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{13} \\ b_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) e^{-\lambda\tau} \\
&\quad \left. + \left(\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}\right) e^{-2\lambda\tau}\right) \\
&\quad -|A| - \left(\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right.
\end{aligned}
$$

$$
+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}\Bigg) e^{-\lambda\tau}
$$

$$
-\left(\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & b_{13} \\ b_{21} & a_{22} & b_{23} \\ b_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}\right.
$$

$$
\left.+\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}\right) e^{-2\lambda\tau} - |B|e^{-3\lambda\tau},
$$

我们设

$$
A_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},
$$

$$
A_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & b_{23} \\ a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & a_{23} \\ b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{13} \\ a_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{13} \\ b_{31} & a_{33} \end{vmatrix},
$$

$$
A_3 = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix},
$$

$$
B_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix},
$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & b_{13} \\ b_{21} & a_{22} & b_{23} \\ b_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

这样，我们有

$$\begin{aligned} h(\lambda,\tau) = \ & -\lambda^2(a_{33} + b_{33}e^{-\tau\lambda}) + \lambda(A_1 + A_2e^{-\lambda\tau} \\ & +A_3e^{-2\lambda\tau}) - |A| - B_1e^{-\lambda\tau} \\ & -B_2e^{-2\lambda\tau} - |B|e^{-3\lambda\tau}, \\ h(\lambda,0) = \ & -\lambda^2(a_{33} + b_{33}) + \lambda(A_1 + A_2 + A_3) \\ & -|A| - |B| - B_1 - B_2. \end{aligned}$$

定理 3.1 的条件 (i) 即为

(a) 当 $a_{33} + b_{33} = 0$ 时，

$$\frac{|A| + |B| + B_1 + B_2}{A_1 + A_2 + A_3} < 0,$$

即

$$(|A| + |B| + B_1 + B_2)(A_1 + A_2 + A_3) < 0, \tag{3.11}$$

(b) 当 $a_{33} + b_{33} \neq 0$ 时，我们有

$$\begin{cases} \frac{A_1+A_2+A_3}{a_{33}+b_{33}} < 0, \\ \frac{|A|+|B|+B_1+B_2}{a_{33}+b_{33}} > 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

设 $\lambda = iy$, $\quad -\lambda\tau = -iy\tau = i\theta$, 则我们有

$$\begin{aligned}h(iy,\tau) &= y^2(a_{33}+b_{33}cos\theta+ib_{33}sin\theta)\\&\quad+iy(A_1+A_2(cos\theta+isin\theta)+A_3(cos2\theta+isin2\theta))\\&\quad-|A|-B_1(cos\theta+isin\theta)-B_2(cos2\theta+isin2\theta)\\&\quad-|B|(cos3\theta+isin3\theta)\\&= y^2(a_{33}+b_{33}cos\theta)-yA_2sin\theta-yA_3sin2\theta\\&\quad-|A|-B_1cos\theta-B_2cos2\theta-|B|cos3\theta\\&\quad+i(y^2b_{33}sin\theta+yA_1+yA_2cos\theta+yA_3cos2\theta\\&\quad-B_1sin\theta-B_2sin2\theta-|B|sin3\theta),\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}U(y,\theta) &= y^2(a_{33}+b_{33}cos\theta)-y(A_2sin\theta+A_3sin2\theta)\\&\quad-|A|-B_1cos\theta-B_2cos2\theta-|B|cos3\theta,\\V(y,\theta) &= y^2b_{33}sin\theta+y(A_1+A_2cos\theta+A_3cos2\theta)\\&\quad-(B_1sin\theta+B_2sin2\theta+|B|sin3\theta),\end{aligned}$$

则我们有 $h(iy,\tau) = U(y,\theta)+iV(y,\theta)$, 这样 $h(iy,\tau)\neq 0$ 等价于 $U(y,\theta)\neq 0$ 或者 $V(y,\theta)\neq 0$.

(i) 当 $sin\theta=0$ 时，即 $\theta=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，我们有

$$\begin{aligned}U(y,\theta) &= y^2(a_{33}+(-1)^kb_{33})\\&\quad-(|A|+(-1)^kB_1+B_2+(-1)^k|B|),\end{aligned}$$

$$V(y,\theta)=y(A_1+A_3+(-1)^kA_2),$$

如 $k=0$, 则 $y=-\frac{1}{\tau}\theta=-\frac{k}{\tau}\pi=0, V(y,\theta)=0$, 当且仅当 $|A|+B_1+B_2+|B|\neq 0$ 时， $h(iy,\tau)\neq 0$.

如果 $k=2m(m=\pm1,\pm2,\cdots)$, 则我们有 $y\neq 0$, 且

$$U(y,\theta)=y^2(a_{33}+b_{33})-(|A|+B_1+B_2+|B|),$$

$$V(y,\theta)=y(A_1+A_2+A_3).$$

由 (3.11)(3.12), 我们有 $V(y,\theta)\neq 0$, 所以 $h(\lambda,\tau)\neq 0$.

如果 $k=2m+1\quad(m=\pm1,\pm2,\cdots)$, 则我们有 $y\neq 0$, 且

$$U(y,\theta) = y^2(a_{33} - b_{33}) - (|A| - B_1 + B_2 - |B|),$$
$$V(y,\theta) = y(A_1 - A_2 + A_3).$$

则 $h(\lambda,\tau) \neq 0$ 等价于 $A_1 - A_2 + A_3 \neq 0$ 或者当 $a_{33} = b_{33}$ 时，$|A| - B_1 + B_2 - |B| \neq 0$；当 $a_{33} \neq b_{33}$ 时，

$\frac{|A|-B_1+B_2-|B|}{a_{33}-b_{33}} < 0;$

(ii) 当 $sin\theta \neq 0$ 时，如果

$$-U(y,\theta)b_{33}sin\theta + V(y,\theta)(a_{33} + b_{33}cos\theta) \neq 0,$$

则必有 $h(\lambda,\tau) \neq 0$. 设

$$-U(y,\theta)b_{33}sin\theta + V(y,\theta)(a_{33} + b_{33}cos\theta) = 0,$$

则

$$\begin{aligned} & y(A_2b_{33} + a_{33}A_1 + (A_3b_{33} + a_{33}A_2 + b_{33}A_1)cos\theta \\ & \quad +a_{33}A_3cos2\theta) \\ & = (a_{33}B_1 + b_{33}B_2 - b_{33}|A|)sin\theta \\ & \quad +(a_{33}B_2 + b_{33}|B|)sin2\theta + a_{33}|B|sin3\theta. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} & y(A_2b_{33} + a_{33}A_1 - a_{33}A_3 + (A_3b_{33} \\ & \quad +a_{33}A_2 + b_{33}A_1)cos\theta + 2a_{33}A_3cos^2\theta) \\ & = sin\theta(a_{33}B_1 + b_{33}B_2 - b_{33}|A| - a_{33}|B| \\ & \quad +2(a_{33}B_2 + b_{33}|B|)cos\theta + 4a_{33}|B|cos^2\theta). \end{aligned}$$

设

$\alpha_1 = A_2b_{33} + a_{33}A_1 - a_{33}A_3,$

$\alpha_2 = A_3b_{33} + a_{33}A_2 + b_{33}A_1,$

$\alpha_3 = 2a_{33}A_3,$

$\alpha_4 = a_{33}B_1 + b_{33}B_2 - b_{33}|A| - a_{33}|B|,$

$\alpha_5 = 2(a_{33}B_2 + b_{33}|B|), \alpha_6 = 4a_{33}|B|.$

则我们有

$$y(\alpha_1 + \alpha_2cos\theta + \alpha_3cos^2\theta) = (\alpha_4 + \alpha_5cos\theta + \alpha_6cos^2\theta)sin\theta$$

将其代入

$$V(y,\theta)(\alpha_1+\alpha_2 cos\theta+\alpha_3 cos^2\theta)^2=0,$$

我们有

$$\begin{aligned}
&(\alpha_4+\alpha_5 cos\theta+\alpha_6 cos^2\theta)^2 sin^3\theta\\
&\quad+(\alpha_4+\alpha_5 cos\theta+\alpha_6 cos^2\theta)sin\theta(\alpha_1+\alpha_2 cos\theta+\alpha_3 cos^2\theta)\\
&\quad\times(A_1+A_2 cos\theta+A_3 cos2\theta)-(\alpha_1+\alpha_2 cos\theta\\
&\quad+\alpha_3 cos^2\theta)^2(B_1+2B_2 cos\theta+|B|(4cos^2\theta-1))sin\theta=0\\
&(\alpha_4+\alpha_5 cos\theta+\alpha_6 cos^2\theta)^2(1-cos^2\theta)\\
&\quad+(\alpha_4+\alpha_5 cos\theta+\alpha_6 cos^2\theta)(\alpha_1+\alpha_2 cos\theta+\alpha_3 cos^2\theta)\\
&\quad\times(A_1-A_3+A_2 cos\theta+2A_3 cos^2\theta)\\
&\quad-(\alpha_1+\alpha_2 cos\theta+\alpha_3 cos^2\theta)^2(B_1-|B|+2B_2 cos\theta+4|B|cos^2\theta)=0,
\end{aligned}$$

整理之得

$$\begin{aligned}
&\alpha_4^2+\alpha_4\alpha_1(A_1-A_2)-\alpha_1^2(B_1-|B|)\\
&\quad+[2\alpha_4\alpha_5+\alpha_4\alpha_1 A_2+(\alpha_4\alpha_2+\alpha_5\alpha_1)\\
&\quad\times(A_1-A_3)-2\alpha_1^2 B_2-2\alpha_1\alpha_2(B_1-|B|)]cos\theta\\
&\quad+[2\alpha_4\alpha_6+\alpha_5^2-\alpha_4^2+2\alpha_4\alpha_1 A_3\\
&\quad+(\alpha_4\alpha_2+\alpha_5\alpha_1)A_2+(\alpha_4\alpha_3+\alpha_5\alpha_2\\
&\quad+\alpha_6\alpha_1)(A_1-A_3)-4\alpha_1|B|-4\alpha_1\alpha_2 B_2\\
&\quad-(2\alpha_1\alpha_3+\alpha_2^2)(B_1-|B|)]cos^2\theta\\
&\quad+[2\alpha_5(\alpha_6-\alpha_4)+2(\alpha_4\alpha_2+\alpha_5\alpha_1)A_3\\
&\quad+(\alpha_4\alpha_3+\alpha_5\alpha_2+\alpha_6\alpha_1)A_2+(\alpha_5\alpha_3\\
&\quad+\alpha_6\alpha_2)(A_1-A_3)-8\alpha_1\alpha_2|B|-2(2\alpha_1\alpha_3\\
&\quad+\alpha_2^2)B_2-2\alpha_2\alpha_3(B_1-|B|)]cos^3\theta\\
&\quad+[\alpha_6^2-2\alpha_4\alpha_6-\alpha_5^2+2(\alpha_4\alpha_3+\alpha_5\alpha_2\\
&\quad+\alpha_6\alpha_1)A_3+(\alpha_5\alpha_3+\alpha_6\alpha_2)A_2\\
&\quad+\alpha_6\alpha_3(A_1-A_2)-4(2\alpha_1\alpha_3+\alpha_2^2)|B|-4\alpha_2\alpha_3 B_2\\
&\quad-\alpha_3^2(B_1-|B|)]cos^4\theta+[-2\alpha_5\alpha_6+2(\alpha_5\alpha_3\\
&\quad+\alpha_6\alpha_2)A_3+\alpha_6\alpha_3 A_2-8\alpha_2\alpha_3|B|
\end{aligned}$$

$-2\alpha_3^2B_2]cos^5\theta+[-\alpha_6^2$
$+2\alpha_2\alpha_3A_3-4\alpha_3^2|B|]cos^6\theta=0$,

我们令

$$a_0=\alpha_4^2+\alpha_4\alpha_1(A_1-A_2)-\alpha_1^2(B_1-|B|),$$

$$\begin{aligned}a_1= &\ 2\alpha_4\alpha_5+\alpha_4\alpha_1A_2+(\alpha_4\alpha_2+\alpha_5\alpha_1)(A_1-A_3)\\ &-2\alpha_1^2B_2-2\alpha_1\alpha_2(B_1-|B|),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2= &\ 2\alpha_4\alpha_6+\alpha_5^2-\alpha_4^2+2\alpha_4\alpha_1A_3\\ &+(\alpha_4\alpha_2+\alpha_5\alpha_1)A_2\\ &+(\alpha_4\alpha_3+\alpha_5\alpha_2+\alpha_6\alpha_1)(A_1-A_3)-4\alpha_1|B|\\ &-4\alpha_1\alpha_2B_2-(2\alpha_1\alpha_3+\alpha_2^2)(B_1-|B|),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_3= &\ 2\alpha_5(\alpha_6-\alpha_4)+2(\alpha_4\alpha_2+\alpha_5\alpha_1)A_3\\ &+(\alpha_4\alpha_3+\alpha_5\alpha_2+\alpha_6\alpha_1)A_2\\ &+(\alpha_5\alpha_3+\alpha_6\alpha_2)(A_1-A_3)-8\alpha_1\alpha_2|B|\\ &-2(2\alpha_1\alpha_3+\alpha_2^2)B_2-2\alpha_2\alpha_3(B_1-|B|),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_4= &\ \alpha_6^2-2\alpha_4\alpha_6-\alpha_5^2+2(\alpha_4\alpha_3+\alpha_5\alpha_2+\alpha_6\alpha_1)A_3\\ &+(\alpha_5\alpha_3+\alpha_6\alpha_2)A_2+\alpha_6\alpha_3(A_1-A_2)\\ &-4(2\alpha_1\alpha_3+\alpha_2^2)|B|-4\alpha_2\alpha_3B_2-\alpha_3^2(B_1-|B|),\end{aligned}$$

$$a_5=-2\alpha_5\alpha_6+2(\alpha_5\alpha_3+\alpha_6\alpha_2)A_3+\alpha_6\alpha_3A_2-8\alpha_2\alpha_3|B|-2\alpha_3^2B_2,$$

$$a_6=-\alpha_6^2+2\alpha_2\alpha_3A_3-4\alpha_3^2|B|.$$

这样我们有

$$a_6cos^6\theta+a_5cos^5\theta+a_4cos^4\theta+a_3cos^3\theta+a_2cos^2\theta+a_2cos\theta+a_0=0.$$

综上所述，显然有

定理 3.3 退化时滞微分系统 (3.5) 为全时滞稳定的充分条件是:

(*i*)　当 $a_{33}+b_{33}=0$ 时, $(|A|+B_1+B_2+|B|)(A_1+A_2+A_3)<0$; 当 $a_{33}+b_{33}\neq 0$ 时, $\frac{A_1+A_2+A_3}{a_{33}+b_{33}}<0$, $\frac{|A|+B_1+B_2+|B|}{a_{33}+b_{33}}>0$.

(*ii*)　(a)　$f(z)=a_6z^6+a_5z^5+a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$ 在 $[-1,1]$ 中无实根.

(*b*)　如果 $\theta=k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 我们有 $A_1-A_2+A_3\neq 0$ 或者当 $a_{33}=b_{33}$ 时, $|A|-B_1+B_2-|B|\neq 0$; 当 $a_{33}\neq b_{33}$ 时,

$$\frac{|A|-B_1+B_2-|B|}{a_{33}-b_{33}}<0.$$

下面我们给出两个例子来说明定理 3.2 和定理 3.3 的应用.

例 3.1　讨论三维退化时滞微分系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-x_1(t)-x_3(t-\tau),\\ 0=x_2(t)-\frac{1}{2}x_2(t-\tau),\\ 0=x_3(t)-\frac{1}{2}x_3(t-\tau),\end{cases}\tag{3.13}$$

的全时滞稳定性.

对照系统 (3.1), 我们有

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

于是我们有

(*i*)　$|A|=-1,\quad |B|=0,$

$$B_1=0+\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&0&-1\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=1,$$

$$B_2 = 0 + 0 + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{4},$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4},$$

这样我们有

$$(|A| + B_1 + B_2 + |B|)(A_1 + A_2 + A_3) = -\frac{1}{16} < 0.$$

(ii) (a) $a_3 = 4A_1|B| = 0,\quad a_2 = -1,\quad a_1 = 2,\quad a_0 = -\frac{25}{16},$
从而有

$$-z^2 + 2z - \frac{25}{16} = 0.$$

显然该方程在 $[-1,1]$ 内无根.

(b) $|A| + B_2 \pm (B_1 + |B|) = (-1 \pm 1) - \frac{1}{4} \neq 0,$

(c) $4A_3^2 = \frac{1}{4}, A_2^2 = 1, 4A_3^2 < A_2^2$. 故有 $cos^2\theta \neq \frac{A_2^2}{4A_3^2}$.

由定理 3.2 得，系统 (3.13) 为全时滞稳定的.

例 3.2 对于三维退化时滞微分系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - x_2(t-\tau), \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - x_3(t-\tau), \\ 0 = x_3(t) - \frac{1}{2}x_3(t-\tau), \end{cases} \tag{3.14}$$

我们有

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

从而可得

$$A_1=\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}=-2\,,$$

$$A_2=\begin{vmatrix}-1&-1\\0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&0\\0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_3=\begin{vmatrix}0&-1\\0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=0,$$

$$B_1=0+\begin{vmatrix}-1&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-1&-1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\tfrac{1}{2},\quad B_2=$$
$0,\quad |A|=0,\quad |B|=0.$

所以我们有

$$\alpha_1=-\tfrac{5}{2},\quad \alpha_2=2,\quad \alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=0.$$

从而有

$$a_6=a_5=a_4=a_3=0,\quad a_2=2,\quad a_1=-5,\quad a_0=\tfrac{25}{8}.$$

这样，我们可得

(i) $a_{33}+b_{33}=1+(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\neq 0,\quad \frac{A_1+A_2+A_3}{a_{33}+b_{33}}=-2<0,$ $\frac{|A|+B_1+B_2+|B|}{a_{33}+b_{33}}=1>0$

(ii) (a) $f(z)=2z^2-5z+\frac{25}{8}=2(z-\frac{5}{4})^2,\quad f(z)=0$ 在

$[-1,1]$ 上无实根.

$$(b)\quad A_1 - A_2 + A_3 = -2 - 1 + 0 = -3 \neq 0.$$

由定理 3.3 得，系统 (3.14) 是全时滞稳定的.

§4.4　退化时滞微分系统的周期解问题

本节我们来讨论退化时滞微分系统的周期解问题. 对于二维退化滞后微分系统，我们特别地给出其周期解的存在性的判定定理. 并在最后举例说明其应用. 由于讨论方法与前几节相仿，因而与其并在同一章内讨论.

考虑退化滞后微分系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1)), & t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), & -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $x(t) \in R^n$ 为状态变量， $E, A, B \in R^{n\times n}$ 均为常量矩阵，而且 $det(E) = 0$. $\varphi(t)$ 为可容的初始函数.

定理 4.1　退化时滞微分系统 (4.1) 存在非常数周期解的充分必要条件是特征方程

$$|\lambda E - A - Be^{-\lambda}| = 0 \tag{4.2}$$

有纯虚根.

证明：定理 4.1 的充分性显然成立，因而我们下面只需要证明该定理的必要性.

设 $x(t) \in R^n$ 为系统 (4.1) 的非常数周期解，且不妨假设 $x(t)$ 的周期为 $2l$. 则我们有， $x(t)$ 在 $[-1,\infty)$ 上连续，可微. 因此，我

们可以将其展开成傅里埃级数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_ke^{i\frac{k\pi}{l}t},\tag{4.3}$$

其中

$$C_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}x(t_1)e^{-i\frac{k\pi}{l}t_1}dt_1.$$

由 $x(t)$ 的可微性，我们有

$$\dot{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}i\frac{k\pi}{l}C_ke^{i\frac{k\pi}{l}t}.\tag{4.4}$$

将 (4.3),(4.4) 代入 (4.2), 我们有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[i\frac{k\pi}{l}E-A-Be^{-i\frac{k\pi}{l}}]C_ke^{i\frac{k\pi}{l}t}=0.$$

所以

$$[i\frac{k\pi}{l}E-A-Be^{-i\frac{k\pi}{l}}]C_k=0,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots).$$

如果 (4.2) 无纯虚根, 则对所有的 $k\neq0$ 都有 $C_k=0$. 故 $x(t)=C_0$, 矛盾. 定理 4.1 证毕.

下面我们来讨论二维退化滞后微分系统的周期解的存在性的代数判据问题.

当 $n=2$ 时，我们可以通过代换将系统 (4.1) 化为

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-1),\tag{4.5}$$

其中

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

$x_1(t), x_2(t)$ 均为纯量函数.

这样我们有

$$\begin{aligned} h(iy) &= |iyE - A - Be^{-iy}| \\ &= \left| \begin{pmatrix} iy & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. -(cos(y) - isin(y)) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right| \\ &= [-a_{11} - b_{11}cos(y) + i(y + b_{11}sin(y))][-a_{22} \\ &\quad -b_{22}cos(y) + ib_{22}sin(y)] - [-a_{12} - b_{12}cos(y) \\ &\quad +ib_{12}sin(y)][-a_{21} - b_{21}cos(y) \\ &\quad +ib_{21}sin(y)]. \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} Re(h(iy)) &= (a_{11} + b_{11}cos(y))(a_{22} + b_{22}cos(y)) \\ &\quad -(y + b_{11}sin(y))b_{22}sin(y) \\ &\quad -(a_{12} + b_{12}cos(y))(a_{21} + b_{21}cos(y)) \\ &\quad +b_{12}b_{21}sin^2(y) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} \\ &\quad +b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12})cos(y) \\ &\quad +(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})cos^2(y) - yb_{22}sin(y) \\ &\quad -(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})sin^2\theta \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \right. \end{aligned}$$

$$
+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\Bigg) cos(y)
+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} cos^2(y) - yb_{22}sin(y)
-\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} sin^2(y)
$$

$$
\begin{aligned}
-Im(h(iy)) &= (a_{11} + b_{11}cos(y))b_{22}sin(y) \\
&\quad +(y + b_{11}sin(y))(a_{22} + b_{22}cos(y)) \\
&\quad -(a_{12} + b_{12}cos(y))b_{21}sin(y) \\
&\quad -b_{12}sin(y)(a_{21} + b_{21}cos(y)) \\
&= (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} + b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12})sin(y) \\
&\quad +(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&\quad sin(y)cos(y) + yb_{22}cos(y) + ya_{22} \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right) sin(y) \\
&\quad + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} sin(2y) + yb_{22}cos(y) + ya_{22}.
\end{aligned}
$$

令

$$
|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},
$$

则我们有

$$
\begin{aligned}
Re(h(iy)) &= |A| + |C|cos(y) + |B|cos(2y) - yb_{22}sin(y) \\
-Im(h(iy)) &= |C|sin(y) + |B|sin(2y) + yb_{22}cos(y) + ya_{22}.
\end{aligned}
$$

$h(iy)=0$ 等价于

$$|C|sin(y)+|B|sin(2y)+yb_{22}cos(y)+ya_{22}=0,$$

$$|C|cos(y)+|B|cos(2y)-yb_{22}sin(y)+|A|=0.$$

于是，我们有

定理 4.2 退化时滞微分系统 (4.5) 存在非常数周期解的充分必要条件是方程组

$$\begin{cases} |C|sin(y)+|B|sin(2y)+yb_{22}cos(y)+ya_{22}=0, \\ |C|cos(y)+|B|cos(2y)-yb_{22}sin(y)+|A|=0 \end{cases} \tag{4.6}$$

有非零实根.

最后我们举例说明定理 4.2 的应用

例 4.1 考虑二维退化时滞微分系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_1(t)-x_2(t)+x_2(t-1)), \\ 0=x_1(t)+x_1(t-1), \end{cases} \tag{4.7}$$

的周期解的存在性.

对照系统 (4.5), 我们有

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|C|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0\,.$$

与 (4.6) 对应的方程组为

$$\begin{cases} -sin(2y)=0, \\ -cos(2y)+1=0, \end{cases}$$

有非零实根 $y = k\pi$, $(k = \pm1, \pm2, \cdots\cdots)$. 故由定理 4.2 得, 系统 (4.7) 存在非零的周期解.

注　关于退化时滞微分系统的周期解的问题, 我们这里只是给出一些初步结果, 需要进一步研究的东西很多, 有兴趣的读者可以在这方面做大量的工作.

第五章　时滞系统的能控性

系统能控性是系统的一个非常重要的概念. 我们将在本章里讨论时滞控制系统的能控性问题. 在第一节, 我们着重讨论退化时滞控制系统的能控性. 随后, 我们给出时滞控制系统的能控性问题的最新成果.

§5.1　退化时滞控制系统的能控性

考虑系统

$$
\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + Cu(t), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - 1, t_0], \end{cases} \tag{1.1}
$$

其中 $E, A, B \in R^{n\times n}$, 均为常数矩阵, 而且 $det(E) \neq 0;C \in R^{n\times m}$; $x(t) \in R^n$ 为状态变量, $u(t) \in R^m$ 为控制变量, 如果 $u(t)$ 为充分可微的, 我们称其为可容控制. $\varphi(t) \in R^n$ 为定义在 $[t_0 - 1, t_0]$ 上的初始函数. 如果 $\varphi(t)$ 充分可微, 而且属于集合 $\{\varphi|E\dot{\varphi}(t_0) = A\varphi(_0t) + B\varphi(t_0 - 1) + Cu(t_0), u(t)$可容$\}$, 则称其为可容的初始函数.

本节主要讨论退化时滞微分控制系统 (1.1) 的能控性, 给出其能控的充分必要条件. 特别是对完全退化 (文献 [7] 中称为完全广

义 (Totally singular)) 时滞控制系统和一类具独立子系统的退化时滞控制系统的能控性，给出一些代数判据.

定义 1.1　对于时刻 $t_1 > t_0$, 如果对任何可容初始函数 φ 和任何 $x_1 \in R^n$, 都存在一个可容控制 $u(t), t \in [t_0, t_1]$ 使得系统 (1.1) 的解 $x(t_1, \varphi) = x_1$, 则称系统 (1.1) 在时刻 t_1 完全欧几里得空间能控的，简称为 C- 能控的.

定义 1.2　对于退化时滞控制系统 (1.1), 我们称集合

$$\mathcal{R}(t_1) = \{x \in R^n / x = x(t_1, 0), u(t)\text{可容}\}$$

为其在时刻 t_1 的可达集.

定理 1.1　退化时滞控制系统 (1.1) 为在时刻 $t_1 > t_0$　C- 能控的充要条件是可达集 $\mathcal{R}(t_1) = R^n$.

证明：设系统 (1.1) 在时刻 t_1 点 C- 能控. 显然 $\mathcal{R}(t_1) \subset R^n$. 对于任何 $x_1 \in R^n$, 由定义 1.1, 存在可容控制 $u(t)$ 使得 $x(t_1) = x_1$. 故 $x_1 \in \mathcal{R}(t_1)$, 从而 $\mathcal{R}(t_1) = R^n$.

反之，如果 $\mathcal{R}(t_1) = R^n$, 则对于任何 $x_1 \in R^n$ 和可容初始函数 φ, 设 $\bar{x}(t, \varphi)$ 为系统

$$\begin{cases} E\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{x}(t-1), & t \geq t_0, \\ \bar{x}(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - 1, t_0], \end{cases}$$

的解. 则 $x_1 - \bar{x}(t_1, \varphi) \in R^n$, 从而存在可容控制 $u(t)$ 使得

$$x_1 - \bar{x}(t_1, \varphi) = x(t_1, 0),$$

即

$$x_1 = \bar{x}(t_1, \varphi) + x(t_1, 0).$$

由于

$$\bar{x}(t_1, \varphi) + x(t_1, 0)$$

也为系统 (1.1) 的以 φ 为初始函数的解，故系统 (1.1) 为在时刻 t_1 点 C- 能控的. 定理 1.1 证毕.

现在我们再来讨论完全退化时滞系统的能控性.

类似于文献 [30] 的方法可得，如果 (E,A) 为正则的，我们可以通过变换，将退化时滞微分系统 (1.1) 化为与其等价的标准形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_{11}x_1(t-1) \\ \qquad\qquad +B_{12}x_2(t-1) + C_1u(t), \\ \qquad\qquad\qquad t \geq 0, \\ N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_{21}x_1(t-1) \\ \qquad\qquad +B_{22}x_2(t-1) + C_2u(t), \\ \qquad\qquad\qquad t \geq 0, \\ x_1(t) = \varphi_1(t), \qquad -1 \leq t \leq 0, \\ x_2(t) = \varphi_2(t), \qquad -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $x_1(t)$, $\varphi_1 \in R^{n_1}$; $x_2(t)$, $\varphi_2 \in R^{n_2}$; $n_1 + n_2 = n$; A_1,$B_{11} \in R^{n_1\times n_1}$; N,$B_{22} \in R^{n_2\times n_2}$; $B_{12} \in R^{n_1\times n_2}$, $B_{21} \in R^{n_2\times n_1}$; N 为幂零矩阵、设 $l = ind(N) = ind(E)$; $C_1 \in R^{n_1\times m}$, $C_2 \in R^{n_2\times m}$.

如果系统 (1.2) 中 $n_1 = 0$, 则 $n_2 = n$, 这时系统即为完全退化时滞控制系统

$$\begin{cases} N\dot{x}(t) = x(t) + Bx(t-1) + Cu(t), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - 1 \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $N \in R^{n\times n}$ 为幂零，设 $in(N) = l$.

由 (1.3) 可得

$$\begin{aligned} x(t) = & -\sum_{i=0}^{l-1} N^iBx^{(i)}(t-1) \\ & -\sum_{i=0}^{l-1} N^iCu^{(i)}(t). \end{aligned}$$

设 $\widetilde{N}=(I,N,\cdots,N^{l-1})$,

$$\begin{aligned}\widetilde{D}&=(I,I\tfrac{d}{dt},I\tfrac{d^2}{dt^2},\cdots,I\tfrac{d^{l-1}}{dt^{l-1}})^T\\&=(I,D,D^2,\cdots,D^{l-1})^T.\end{aligned}$$

这里 $I\in R^{n\times n}$ 为单位矩阵, T 表示转置, $D=I\frac{d}{dt}$, 则

$$x(t)=-\widetilde{N}\widetilde{D}\,Bx(t-1)-\widetilde{N}\widetilde{D}\,Cu(t).$$

如果存在正整数 k 使得 $t\in[t_0+k,t_0+k+1)$, 则

$$\begin{aligned}x(t)=\;&-\widetilde{N}\widetilde{D}\,Cu(t)\\&+(-\widetilde{N}\widetilde{D}\,B)(-\widetilde{N}\widetilde{D}\,C)u(t-1)\\&+(-\widetilde{N}\widetilde{D}\,B)^2(-\widetilde{N}\widetilde{D}\,C)u(t-2)\\&+\cdots\cdots\\&+(-\widetilde{N}\widetilde{D}\,B)^k(-\widetilde{N}\widetilde{D}\,C)u(t-k)\\&+(-\widetilde{N}\widetilde{D}\,B)^{k+1}x(t-k-1).\end{aligned}$$

因为 $x(t-k-1)=\varphi(t-k-1)=0$, 所以有

$$\begin{aligned}x(t)&=\sum_{j=0}^{k}(-\widetilde{N}\widetilde{D}\,B)^j(-\widetilde{N}\widetilde{D}\,C)u(t-j)\\&=\sum_{j=0}^{k}(\widetilde{N}\widetilde{D}\,B)^j(\widetilde{N}\widetilde{D}\,C)(-1)^{j+1}u(t-j).\end{aligned}$$

取 $j=0$ 时

$$\begin{aligned}\widetilde{N}\widetilde{D}\,C=\;&(I,N,\cdots,N^{l-1})\\&\times(I,D,D^2,\cdots,D^{l-1})^TC.\end{aligned}$$

取 $j=1$ 时

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{N}\widetilde{D}\,B)(\widetilde{N}\widetilde{D}\,C)\\
&\quad=(B+NBD+N^2BD^2+\cdots+N^{l-1}BD^{l-1})\\
&\quad\times(I+ND+\cdots+N^{l-1}D^{l-1})C\\
&\quad=[B+(NB+BN)D+(BN^2+NBN+N^2B)D^2\\
&\qquad+(BN^3+NBN^2+N^2BN\\
&\qquad+N^3B)D^3+\cdots\cdots+\\
&\qquad+(BN^{l-1}+NBN^{l-2}+\cdots+N^{l-1}B)D^{l-1}\\
&\qquad+(NBN^{l-1}+N^2BN^{l-2}\\
&\qquad+\cdots+N^{l-1}BN)D^l\\
&\qquad+\cdots\cdots\\
&\qquad+N^{l-1}BN^{l-1}D^{2(l-1)}]C\\
&\quad=[B,(NB+BN),(BN^2+NBN+N^2B),\\
&\qquad(BN^3+NBN^2+N^2BN+N^3B),\cdots\cdots,\\
&\qquad(BN^{l-1}+NBN^{l-2}+\cdots+N^{l-1}B),\\
&\qquad(NBN^{l-1}+N^2BN^{l-2}+\cdots+N^{l-1}BN),\\
&\qquad\cdots\cdots,N^{l-1}BN^{l-1}][I,D,D^2,\cdots,D^{2(l-1)}]^TC.
\end{aligned}
$$

设

$$
B_{1,h}=BN^h+NBN^{h-1}+\cdots+N^hB,\qquad (h=1,2,\cdots)
$$

显然当 $h>2(l-1)$ 时， $B_{1,h}=0$.

这样我们有:

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{N}\widetilde{D}\,B)(\widetilde{N}\widetilde{D}\,C)&=(B_{1,0},B_{1,1},\cdots,B_{1,2(l-1)})\\
&\times(I,D,D^2,\cdots,D^{2(l-1)})^TC.
\end{aligned}
$$

取 $j=2$ 时

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{N}\widetilde{D}\,B)^2(\widetilde{N}\widetilde{D}\,C)\\
&\quad=(B+NBD+N^2BD^2+\cdots\\
&\qquad+N^{l-1}BD^{l-1})(B_{1,0}+B_{1,1}D\\
&\qquad+\cdots+B_{1,2(l-1)}D^{2(l-1)})C\\
&\quad=[BB_{0,0}+(NBB_{1,0}+BB_{1.1})D\\
&\qquad+(BB_{1,2}+NBB_{1,1}+N^2BB_{1,0})D^2\\
&\qquad+(BB_{1,3}+NBB_{1,2}+N^2BB_{1,1}+N^3BB_{1,0})D^3\\
&\qquad+(BB_{1,4}+NBB_{1,3}+N^2BB_{1,2}\\
&\qquad+N^3BB_{1,1}+N^4BB_{1.0})D^4\\
&\qquad+\cdots\cdots\\
&\qquad+(BB_{1,h}+NBB_{1,h-1}+N^2BB_{1,h-2}\\
&\qquad+\cdots+N^hBB_{1,0})D^h\\
&\qquad+\cdots+(N^{l-1}BB_{1,2(l-1)})D^{3(l-1)}]C.
\end{aligned}
$$

设 $B_{2,h}=BB_{1,h}+NBB_{1,h-1}+\cdots+N^hB_{1,0},(h=0,1,2,\cdots)$. 显然，当 $h>3(l-1)$ 时， $B_{2,h}=0$. 这时我们有

$(\widetilde{N}\widetilde{D}\,B)^2(\widetilde{N}\widetilde{D}\,C)=(B_{2,0},B_{2,1},\cdots,B_{2,3(l-1)})$
$(I,D,D^2,\cdots,D^{3(l-1)})^TC.$

一般地，我们设

$$
\begin{aligned}
B_{j,h}=&BB_{j-1,h}+NBB_{j-1,h-1}\\
&+\cdots+N^hB_{j-1,0}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

显然 $B_{j,h}$ 为 C_{h+1}^j 项矩阵的和，而这些项均为含 j 个 B,h 个 N 的所有可能的乘积，当然凡是含有 N 的大于 $l-1$ 次方项均为 0.

例如， $B_{2,2}=BB_{1,2}+NBB_{1,1}+N^2BB_{1,0}=B(BN^2+NBN$

$+ N^2B) + NB(BN + NB) + N^2B^2 = B^2N^2 + BNBN + BN^2B$
$+ NB^2N + NBNB + N^2B^2.$

这样我们有

$(\widetilde{N}\widetilde{D}\, B)^j(\widetilde{N}\widetilde{D}\, C) = (B_{j,0}, B_{j,1}, \cdots, B_{j,(j+1)(l-1)})$
$(I, D, D^2, \cdots, D^{(j+1)(l-1)})^T C.$

设 $I_m \in R^{m\times m}$ 为单位矩阵， $D_m = I_m \frac{d}{dt}$, 则

$$
\begin{aligned}
&(I, D, D^2, \cdots, D^{(j+1)(l-1)})^T C = (C^T, DC^T, D^2C^T, \cdots,\\
&\quad D^{(j+1)(l-1)}C^T)^T\\
&\quad = (C^T, C^T D_m, C^T D_m^2, \cdots, C^T D_m^{(j+1)(l-1)})^T.
\end{aligned}
$$

这时,

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{N}\widetilde{D}\, B)^j(\widetilde{N}\widetilde{D}\, C)\\
&\quad = (B_{j,0}C, B_{j,1}C, \cdots, B_{j,(j+1)(l-1)}C)\\
&\qquad (I_m, D_m, D_m^2, \cdots, D_m^{(j+1)(l-1)})^T.
\end{aligned}
$$

设

$$A_j = (B_{j,0}C, B_{j,1}C, \cdots, B_{j,(j+1)(l-1)}C), \tag{1.5}$$

$$\widetilde{D}_j = (I_m, D_m, D_m^2, \cdots, D_m^{(j+1)(l-1)})^T, \tag{1.6}$$

则有

$$x(t) = \sum_{j=0}^{k} A_j\, \widetilde{D}_j\, (-1)^{j+1} u(t-j)$$

于是我们有

定理 1.2 完全退化时滞控制系统 (1.3) 为在 $t_1 \in [t_0 + k, t_0 + k + 1)$ C- 能控的充要条件为矩阵

$$J_k = (A_0, A_1, \cdots, A_k)$$

的秩为 n.

证明：由定理 1.1, 系统 (1.3) 为 C- 能控的充分必要条件为 $\mathcal{R}(t_1) = R^n$.

首先我们来证明充分性. 设

$u_k = (-(\widetilde{D}_0)^T u(t), (\widetilde{D}_1)^T u(t-1), \cdots, (-1)^k(\widetilde{D}_k)^T u(t-k))^T$, 则 $x(t) = J_k u_k$. 如果系统 (1.3) 非 C- 能控, 则 $\mathcal{R}(t_1) \neq R^n$, 必存在非零的 $\eta \in R^n$, 使得对所有的 $x(t_1) \in \mathcal{R}(t_1)$, 有 $\eta x(t_1) = 0$. 即 $\eta J_k u_k = 0$, 取 $u(t)$ 满足 $u_k = J_k^T \eta^T$, 则 $\|\eta J_k\|^2 = 0$, 即 $\eta J_k = 0$, 这与 $rank(J_k) = n$ 矛盾.

再来证明必要性, 如果 $rank(J_k) \neq n$, 则存在非零的 $\eta \in R^n$, 使得 $\eta J_k = 0$.

对于任何 $x(t_1) \in \mathcal{R}(t_1)$, 有 $x(t_1) = J_k u_k$, 则 $\eta x(t_1) = \eta J_k u_k = 0 u_k = 0$, 故 $rank(J_k) \neq n$, 矛盾. 定理 1.2 证毕.

例 1.1　考虑退化时滞微分控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_1(t-1) + u(t), & t \geq 0, \\ 0 = x_2(t) + u(t), & t \geq 0, \\ x_1(t) = \varphi_1(t), & -1 \leq t \leq 0, \\ x_2(t) = \varphi_2(t), & -1 \leq t \leq 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

对照系统 (1.3) 得

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $0 \leq t < 1$ 时， $J_0 = (B_{0,0}C) = C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

秩 $(J_0) = 1 \neq 2$, 故这时系统 (1.7) 是不能控的.

当 $1 \leq t < 2$ 时， $J_1 = (A_0, A_1)$, 而

$$A_0 = B_{0,0}c = C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_1 = (B_{1,0}C, B_{1,1}C, B_{1,2}C),$$

$$B_{1,0} = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{1,1} = BN + NB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{1,2} = BN^2 + NBN + N^2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 从而我们有

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

秩 $(J_1) = 2$, 故由定理 1.2 得，这时系统 (1.7) 是 C- 能控的.

注 由例 1.1 可见，退化时滞控制系统的能控性不仅与系统自身的结构有关，而且与终点的时刻 t_1 有关.

下面我们再考虑一类具独立子系统的退化时滞控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1x_1(t-1) + B_2x_2(t-1) + C_1u(t), \\ N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_4x_2(t-1) + C_2u(t), \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $x_1(t) \in R^{n_1}$; $x_2(t) \in R^{n_2}$; $n_1 + n_2 = n$; $A_1, B_1 \in R^{n_1 \times n_1}$; N,$B_4 \in R^{n_2 \times n_2}$; $B_2 \in R^{n_1 \times n_2}$,N 为幂零矩阵，设 $l = ind(N) = ind(E)$; $C_1 \in R^{n_1 \times m}, C_2 \in R^{n_2 \times m}$.

对于系统 (1.8), 我们首先给出

定义 1.3 对于退化时滞控制系统 (1.8), 我们定义两个可达集

$$\mathcal{R}_1(t_1) = \{x_1 \in R^{n_1} / x_1 = x_1(t_1, 0), u(t)\text{可容}\}$$

$$\mathcal{R}_2(t_1) = \{x_2 \in R^{n_2} / x_2 = x_2(t_1, 0), u(t)\text{可容}\}$$

显然我们有 $\mathcal{R}(t_1) = \mathcal{R}_1(t_1) + \mathcal{R}_2(t_1)$.

定理 1.3　退化时滞控制系统 (1.8) 为在时刻 $t_1 > t_0$ 能控的充分必要条件为:

$$\mathcal{R}_1(t_1) = R^{n_1}, \qquad \mathcal{R}_2(t_1) = R^{n_2}.$$

该定理的证明类似于文献 [95] 中定理 2 的证明. 需特别注意的是将 u 分成 $u_1 + u_2$, 其中 u_1 对 x_2 不起作用, 从而确定 u_1, u_2.

对于具独立子系统的时滞控制系统 (1.8), 由其第二个方程得

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{l-1} N^i B_4 x_2^{(i)}(t-1) - \sum_{i=0}^{l-1} N^i C_2 u^{(i)}(t).$$

设

$$\widetilde{N} = (I, N, \cdots, N^{l-1}),$$
$$\widetilde{D} = (I, I\tfrac{d}{dt}, I\tfrac{d^2}{dt^2}, \cdots, I\tfrac{d^{l-1}}{dt^{l-1}})^T = (I, D, D^2, \cdots, D^{l-1})^T.$$

这里 $I \in R^{n_2 \times n_2}$ 为单位矩阵, T 表示转置, $D = I\frac{d}{dt}$, 则

$$x_2(t) = -\widetilde{N}\widetilde{D}\, B_4 x_2(t-1) - \widetilde{N}\widetilde{D}\, C_2 u(t).$$

如果存在正整数 k 使得 $t \in [t_0 + k, t_0 + k + 1)$, 则

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \sum_{j=0}^{k} (-\widetilde{N}\widetilde{D}\, B_4)^j (-\widetilde{N}\widetilde{D}\, C_2) u(t-j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} (\widetilde{N}\widetilde{D}\, B_4)^j (\widetilde{N}\widetilde{D}\, C_2)(-1)^{j+1} u(t-j). \end{aligned}$$

我们设

$$\bar{B}_{j,h} = B_4 \bar{B}_{j-1,h} + N B_4 \bar{B}_{j-1,h-1} + \cdots + N^h \bar{B}_{j-1,0}. \qquad (1.9)$$

显然 $\bar{B}_{j,h}$ 为 C_{h+j}^j 项矩阵的和, 而这些项均为含 j 个 B_4,h 个 N 的所有可能的乘积, 当然凡是含有 N 的大于 $l-1$ 次方项均为 0.

设 $I_m \in R^{m \times m}$ 为单位矩阵, $D_m = I_m \frac{d}{dt}$, 则

$$\begin{aligned} &(I, D, D^2, \cdots, D^{(j+1)(l-1)})^T C_2 \\ &= (C_2^T, DC_2^T, D^2 C_2^T, \cdots, D^{(j+1)(l-1)} C_2^T)^T \\ &= (C_2^T, C_2^T D_m, C_2^T D_m^2, \cdots, C_2^T D_m^{(j+1)(l-1)})^T, \end{aligned}$$

这时，

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{N}\widetilde{D}\,B_4)^j(\widetilde{N}\widetilde{D}\,C_2)\\
&\quad=(\bar{B}_{j,0}C_2,\bar{B}_{j,1}C_2,\cdots,\bar{B}_{j,(j+1)(l-1)}C_2)\quad\cdot\\
&\qquad(I_m,D_m,D_m^2,\cdots,D_m^{(j+1)(l-1)})^T.
\end{aligned}
$$

设

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_j&=(\bar{B}_{j,0}C_2,\bar{B}_{j,1}C_2,\cdots,\bar{B}_{j,(j+1)(l-1)}C_2),\\
\widetilde{D}_j&=(I_m,D_m,D_m^2,\cdots,D_m^{(j+1)(l-1)})^T,
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

则有

$$
x_2(t)=\sum_{j=0}^{k}\bar{A}_j\,\widetilde{D}_j\,(-1)^{j+1}u(t-j).
$$

设

$$
J_k=(\bar{A}_0,\bar{A}_1,\cdots,\bar{A}_k). \tag{1.11}
$$

$$
u_k=(-(\widetilde{D}_0)^Tu(t),(\widetilde{D}_1)^Tu(t-1),\cdots,(-1)^k(\widetilde{D}_k)^Tu(t-k))^T.
$$

这时，我们有

$$
x_2(t)=J_ku_k. \tag{1.12}
$$

将 (1.12) 代入 (1.8) 的第一个方程得

$$
\dot{x}_1(t)=A_1x_1(t)+B_1x_1(t-1)+B_2J_ku_k(t-1)+C_1u(t).
$$

设

$$
\hat{A}_k=\begin{pmatrix}
A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
B_1 & A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & B_1 & A_1 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & A_1 & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & B_1 & A_1
\end{pmatrix}, \tag{1.13}
$$

$$E_k=[0,0,\cdots,0,I_{n_1}], \tag{1.14}$$

$$Z_k(0)=\begin{pmatrix} I \\ e^{\hat{A}_{k-1}}Z_{k-1}(0) \end{pmatrix} \qquad Z_0(0)=I_{n_1}. \tag{1.15}$$

由文献 [95] 可得

$$x_1(t)=\int_0^{t_1} E_k e^{\hat{A}_k(\theta-k)} Z_k(0)(B_2J_k,C_1)\begin{pmatrix} u_k(\theta-1) \\ u(\theta) \end{pmatrix} d\theta.$$

设

$$\bar{C}_i=Z_i(0)(B_2J_i,C_1), \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}(t_1)= \ & [E_0\bar{C}_0,\cdots,E_0(\hat{A}_0)^{n_1-1}\bar{C}_0,\cdots,E_k\bar{C}_k,\\ & \cdots,E_k(\hat{A}_k)^{n_1(k+1)-1}\bar{C}_k].\end{aligned} \tag{1.17}$$

定理 1.4　退化时滞控制系统 (1.8) 为在时刻 $t_1\in[t_0+k,t_0+k+1)$ 能控的充要条件为秩 $(\bar{Q}(t_1))=n_1$, 秩 $(J_k)=n_2$.

证明：我们首先来证明必要性. 假设，秩 $(\bar{Q}(t_1))\neq n_1$, 或者秩 $(J_k)\neq n_2$.

当秩 $(J_k)\neq n_2$ 时，存在非零的 $\eta_2^T\in R^{n_2}$ 使得 $\eta_2^T J_k=0$. 对任何 $x_2(t_1)\in\mathcal{R}_2(t_1)$, 有 $x_2(t_1)=J_k u_k$, 则 $\eta_2^T x_2(t_1)=\eta_2^T J_k u_k=0u_k=0$, 故 $\mathcal{R}_2(t_1)\neq R^{n_2}$, 这与定理 1.1 矛盾.

当秩 $(\bar{Q}(t_1))\neq n_1$ 时，则存在非零的 η_1 使得 $\eta_1^T\bar{Q}(t_1)=0$. 由 Cayley-Hamilton 定理可得

$$\eta_1^T E_i e^{\hat{A}_k(t_1-s-i)}\bar{C}_i=0,$$

其中 $s\in(t_1-i-1,t_1-i]$, $i=0,1,\cdots,k$. 则对任何 $x_1(t_1)\in\mathcal{R}_1(t_1)$, 有

$$x_1(t)=\int_0^{t_1} E_k e^{\hat{A}_k(\theta-k)} Z_k(0)(B_2J_k,C_1)\begin{pmatrix} u_k(\theta-1) \\ u(\theta) \end{pmatrix} d\theta.$$

则

$$\begin{aligned}\eta_1^T x_1(t) &= \int_0^{t_1} \eta_1^T E_k e^{\hat{A}_k(\theta-k)} \bar{C}_k \begin{pmatrix} u_k(\theta-1) \\ u(\theta) \end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_0^{t_1} 0 \begin{pmatrix} u_k(\theta-1) \\ u(\theta) \end{pmatrix} d\theta = 0,\end{aligned}$$

故 $\mathcal{R}_1(t_1) \neq R^{n_1}$, 这与定理 1.3 矛盾.

充分性: 如果系统 (1.8) 为非能控的, 则由定理 1.3, 必有: 或者 $\mathcal{R}_1(t_1) \neq R^{n_1}$, 或者 $\mathcal{R}_2(t_1) \neq R^{n_2}$.

如果 $\mathcal{R}_2(t_1) \neq R^{n_2}$, 则存在非零的 $\eta_2 \in R^{n_2}$, 使对所有的 $x_2(t_1) \in \mathcal{R}_2(t_1)$ 有 $\eta_2^T x_2(t_1) = 0$. 即 $\eta_2^T J_k u_k = 0$.

取 $u(t)$ 满足 $u_k = J_k^T \eta$, 则有

$$\|\eta^T J_k\|^2 = 0, \qquad \eta^T J_k = 0,$$

这与秩 $(J_k) = n_2$ 矛盾.

如果

$\mathcal{R}_1(t_1) \neq R^{n_1}$,

则存在非零的 $\eta_1 \in R^{n_1}$ 使得对任何

$x_1(t_1) \in \mathcal{R}_1(t_1)$

有 $\eta_1^T x_1(t_1) = 0$

即

$$\eta_1^T x_1(t) = \int_0^{t_1} \eta_1^T E_k e^{\hat{A}_k(\theta-k)} \bar{C}_k \begin{pmatrix} u_k(\theta-1) \\ u(\theta) \end{pmatrix} d\theta = 0$$

取 u 满足

$$\begin{pmatrix} u_k(\theta-1) \\ u(\theta) \end{pmatrix} = (\eta_1^T E_k e^{\hat{A}_k(\theta-k)} \bar{C}_k)^T,$$

则有

$$\int_0^{t_1} \|\eta_1^T E_k e^{\hat{A}_k(\theta-k)} \bar{C}_k\| d\theta = 0,$$

则几乎处处有

$$\eta_1^T E_k e^{\hat{A}_k(\theta-k)} \bar{C}_k = 0,$$

逐次微分并令 $\theta = k$ 得 $\eta_1^T \bar{Q}(t_1) = 0$. 这与秩 $(\bar{Q}(t_1)) = n_1$ 矛盾. 定理 1.4 证毕.

例 1.2　考虑退化时滞微分控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_1(t-1) + x_3(t-1) + u(t), & t \geq 0, \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) + x_2(t-1) + u(t), & t \geq 0, \\ 0 = x_3(t) + u(t), & t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), & -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{1.18}$$

其中 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 均为纯量函数. 我们可将其写成 (1.8) 的形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_1(t-1) + (0,1)\begin{pmatrix} x_2(t-1) \\ x_3(t-1) \end{pmatrix} + u(t), t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \\ \qquad + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2(t-1) \\ x_3(t-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \qquad t \geq 0, \\ x_1(t) = \varphi_1(t), \qquad -1 \leq t \leq 0, \\ \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 0, \end{cases}$$

对照系统 (1.8) 我们有

$$A_1=(1),\qquad B_1=(1),\qquad B_2=(0,1),\qquad C_1=(1)\ ,$$
$$N=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad B_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ .$$

当 $0\le t_1<1$ 时，由 (1.10)(1.11) 得

$$J_0=(\bar A_0)=(B_{0,0}C_2)=C_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

秩 $(J_0)=1<2$, 由定理 1.4 得，这时系统 (1.18) 在 t_1 不能控.

当 $1\le t_1<2$ 时，由 (1.10)(1.11) 得

$$B_{1,0}=B_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$$
$$B_{1,1}=B_4N^2+NB_4N+N^2B_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$
$$B_{1,2}=B_4N^2+NB_4N+N^2B_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

所以我们有

$$\bar A_1=(B_{1,0}C_2,B_{1,1}C_2,B_{1,2}C_2)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$J_1=(\bar A_0,\bar A_1)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

秩 $(J_1)=2=n_2$.

又由 (1.13)(1.14), 我们有

$$\hat A_1=\begin{pmatrix}A_1&0\\B_1&A_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\qquad E_1=[0,I]=(0,1)\ ,$$

由 (1.15) 得

$$Z_1(0)=\begin{pmatrix} I \\ e^{\hat{A}_0}Z_0(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix},$$

由 (1.16) 得

$$\begin{aligned}\bar{C}_1 &= Z_1(0)(B_2J_1,C_1)=\begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix},\end{aligned}$$

由 (1.17) 得

$$\begin{aligned}\bar{Q}(t_1) &= (E_0\bar{C}_0,E_1\bar{C}_1,E_1(\hat{A}_1)\bar{C}_1)\\ &= (1,e,0,0,0,e,1+e,0,0,0,1+e),\end{aligned}$$

秩 $(\bar{Q}(t_1)=1=n_1$.

由定理 1.4 得，这时系统 (1.18) 在 t_1 为能控的.

§5.2　滞后控制系统的能控性与终点时刻间的相关性

在现代控制理论及其应用中，我们发现系统的能控性，特别是由常微分方程确定的线性自治控制系统的能控性，往往只由其系统自身的结构所决定，而与终点时刻无关. 但是对于滞后控制系统来说，其能控性除与系统的结构有关外，还与终点时刻有着密切的关系 [101]. 因此我们需要对此作深入讨论.

考虑系统

$$
\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-1), u(t)), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - 1 \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{2.1}
$$

其中 $x(t) \in R^n, f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) \in R^n,\varphi(t)$ 为可容的初始函数，$u(t) \in R^m$ 为可容的控制变量 (在任何有限区间内有界可测).

定义 2.1 对于时刻 $T > 0$, 如果对任何可容初始函数 φ 和任何 $x_1 \in R^n$, 都存在一个可容控制 $u(t), t \in [t_0, T]$ 使得系统 (2.1) 的解 $x(T, \varphi) = x_1$, 则称系统 (2.1) 为在时刻 T 点能控的.

定义 2.2 如果滞后控制系统 (2.1) 对于任何时刻 T, 都在 T 是能控的，则称该系统为完全能控的.

一般说来，并不是所有的能控的滞后控制系统都是完全能控的.

例 2.1 由文献 [101] 可证系统

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(t) \\ u(t) \end{pmatrix}
$$

当 $T \leq 1$ 时，在 T 点不能控，而当 $T > 1$ 时，系统在 T 点却是能控的.

对于自治线性滞后控制系统

$$
\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + Cu(t), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - 1, t_0], \end{cases} \tag{2.2}
$$

我们有

定理 2.1 系统 (2.2) 在时刻

$T \in [k, k+1), \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$

能控的充要条件为矩阵

$$\begin{aligned} Q_k(T) = \ & [E_0C_0, \cdots, E_0A^{n-1}C_0, \cdots, E_kC_k, \\ & \cdots, E_kA_k^{n(k+1)-1}C_k] \end{aligned}$$

的秩为 n.

其中 $C_i = Z_i(0)C, (i = 0,1,2,\cdots)$, $E_k = [0,0,\cdots,0,I] \in R^{n\times n(k+1)}$; $Z_0(0) = I$,

$$Z_k(0) = \begin{pmatrix} I \\ e^{A_{k-1}} Z_{k-1}(0) \end{pmatrix},$$

$$A_k = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B & A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & A \end{pmatrix} \in R^{(k+1)n\times(k+1)n}.$$

该定理的证明参见文献 [62], 这里从略.

由此我们不难证明:

定理 2.2　滞后控制系统 (2.2) 完全能控的充要条件为其对应的常微分方程确定的控制系统 (B=0) 为能控的.

定义 2.3　在系统 (2.1) 中, 如果对任何可容初始函数 φ 和任何 $x_1 \in R^n$, 都存在一个可容控制 $u(t)$ 和时刻 t_1 使得系统 (2.1) 的解 $x(t_1) = x_1$, 则称系统 (2.1) 为毕竟能控的.

定理 2.3　系统 (2.2) 为毕竟能控的充要条件为存在正整数 k 使得矩阵

$$Q_k(T) = [E_0C_0, \cdots, E_0A^{n-1}C_0, \cdots, E_kC_k, \cdots, E_kA_k^{n(k+1)-1}C_k]$$

的秩为 n.

定义 2.4 对于滞后控制系统 (2.1), 如果对任意 $x_1 \in R^n$, 都存在控制 $u(t)$ 使得

$$\lim_{t\to+\infty} x(t,\varphi,u(t)) = x_1,$$

则称该系统为最终能控的.

定义 2.5 对于滞后控制系统 (2.1), 如果对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $x_1 \in R^n$, 存在可容控制 $u(t)$ 和时刻 t_1 使得

$$|x(t_1) - x_1| < \varepsilon,$$

则称滞后控制系统 (2.1) 为拟能控的.

由上述定义和定理，我们容易证明:

定理 2.4 滞后控制系统 (2.1) 的各种控制有如下包含关系

1. 全能控必毕竟能控，但反之不然.
2. 毕竟能控，且 $\lim_{t\to+\infty} Q_k$ 存在，必最终能控.
3. 最终能控，必拟能控.

定义 2.6 对于滞后控制系统 (2.1), 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在可容控制 $u(t)$ 和时刻 t_1 使得

$$|x(t_1,\varphi,u(t_1))| < \varepsilon,$$

则称滞后控制系统 (2.1) 为拟零能控的.

这样，我们可以证明 (参见 [62]):

定理 2.5 对于滞后控制系统 (2.1), 如果 f 为有界的，且存在一个实值连续的李雅普诺夫函数 $V(t,x)$, 和一个可容控制 $u(t)$, 使得

(i) $V(t,x) \geq 0, t \geq t_0 - 1$;

(ii) $\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t,x(t),x(t-1),u(t)) \leq -\beta(|x(t)|)$,

则滞后控制系统 (2.1) 为拟零能控的. 这里 $\beta(s)$ 为 $s \geq 0$ 的连续正定的实函数.

§5.3 线性滞后系统的输出能控性

关于滞后控制系统的能控性的研究，目前已有许多成果. 但是这些成果均是关于系统的状态能控性的. 而在控制系统的实际设计中，需要控制的是系统的输出，并非系统的状态. 而系统的输出能控性与系统的状态能控性之间却没有必然联系 [12]. 本节正是对滞后线性控制系统，给出输出能控性的概念和一些重要结论. 特别是对自治的滞后线性控制系统，给出令人满意的结果.

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-1) + C(t)u(t), & t \in (0,T], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-1,0], \\ y(t) = D(t)x(t) + E(t)u(t), & t \in [-1,T], \end{cases} \tag{3.1}$$

这里 $x(t) \in R^n$ 为状态变量，$u(t) \in R^r$ 为可容的 (在每个有限区间内平方可积) 控制向量，$y(t) \in R^l$ 为输出向量函数. $A(t), B(t) \in R^{n\times n}, C(t) \in R^{n\times r}, D(t) \in R^{l\times n}, E(t) \in R^{l\times r}$ 均为矩阵函数. 假设 $A(t), B(t)$ 满足 $\|A(t)\| \le m(t), \|B(t)\| \le m(t), \quad m(t) \in L^2(0,T)$.

定义 3.1　对于时刻 $T > 0$, 如果对任何可容初始函数 φ 和任何 $y_1 \in R^l$, 都存在一个可容控制 $u(t), t \in [t_0, T]$ 使得 $y(T) = y_1$, 则称系统 (3.1) 在时刻 T 点欧氏空间完全输出能控的.

定义 3.2　对于时滞控制系统 (3.1), 我们称集合

$$G(T) = \{y \in R^l / y = y(T), u(t)\text{可容}, \varphi = 0\}$$

为其在时刻 T 的输出可达集.

由文献 [99] 我们可得

定理 3.1　系统 (3.1) 为在 T 为完全输出能控的充要条件是其输出可达集 $G(T) = R^l$.

定理 3.2　系统 (3.1) 为在 T 为完全输出能控的充要条件是

$$\eta^T(\int_0^T D(T)X(T,s)C(s)u(s)ds + Eu(T)) = 0$$

意味着 $\eta = 0$, 这里 $\eta \in R^l$,$X(T,s)$ 为基础解 (见 [99]).

对系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-1) + Cu(t), & t \in (0,T], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-1,0], \\ y(t) = Dx(t) + Eu(t), & t \in [-1,T], \end{cases} \tag{3.2}$$

我们有

定理 3.3　系统 (3.2) 为在 T 为完全输出能控的充要条件是矩阵

$$\begin{aligned} W(T) = \ & [DE_0C_0, DE_0A_0C_0, \cdots, DE_0A_0^{n-1}C_0, \cdots, \\ & DE_kC_k, \cdots, DE_kA_k^{n(k+1)-1}C_k, E] \end{aligned}$$

的秩为 l. 这里 $C_i = Z_i(0), i = 1,2,\cdots; T \in (k-1,k), Z_k(0) = \begin{pmatrix} I \\ e^{A_{k-1}}Z_{k-1}(0) \end{pmatrix}, Z_0(0) = I$.

证明: 先证明必要性. 假定秩 (W(T))< l, 则存在非零的 $\eta \in R^l$, 使得

$$\eta^T DE_iC_i = \cdots = \eta^T DE_iA_i^{n(i+1)-1}C_i = 0 \qquad (i = 0,1,\cdots,k) \tag{3.3}$$

且 $\eta^T E = 0$.

由 Carley-Hamilton 定理和 (3.3) 式，对

$m = 0,1,2,\cdots; i = 0,1,\cdots,k$, 有

$$\eta^T DE_iA_i^{n(i+1)+m}C_i = 0.$$

由指数矩阵的幂级数展开，有

$$\begin{cases} \eta^T DE_0 e^{A_0(T-s)} C_0 = 0, & s \in (T-1, T], \\ \eta^T DE_1 e^{A_1(T-s-1)} C_1 = 0, & s \in (T-2, T-1], \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ \eta^T DE_k e^{A_k(T-s-k)} C_k = 0, & s \in (0, T-k], \end{cases} \tag{3.4}$$

由 [99] 知

$$X(t) = E_k e^{A_k(t-k)} Z_k(0). \tag{3.5}$$

从而可得

$$\eta^T DX(T-s)C = 0, \qquad s \in (0, T]. \tag{3.6}$$

由 (3.4),(3.6) 得

$$\begin{aligned} &\eta^T(\textstyle\int_0^T DX(T-s)Cu(s)ds + Eu(T)) \\ &\quad = \textstyle\int_0^T \eta^T DX(T,s)Cu(s)ds + \eta^T Eu(T) = 0, \end{aligned}$$

这与定理 3.2 矛盾，故秩 (W(T))= l.

再证充分性：已知秩 (W(T))= l, 如果系统 (3.2) 不是在时刻 T 欧氏空间完全输出能控的，则由定理 3.2 可得，存在非零的 η 使得

$$\eta^T\left(\int_0^T DX(T-s)Cu(s)ds + Eu(T)\right) = 0 \tag{3.7}$$

对所有的 $u(t) \in L^2$ 成立．取

$$u(s) = \begin{cases} (\eta^T E)^T & s = T \\ 0 & s \neq T, \end{cases}$$

则 $\eta^T E(\eta^T E)^T = 0$, 故

$$\eta^T E = 0 \tag{3.8}$$

于是对所有的 $u \in L^2$ 有

$$\int_0^T \eta^T DX(T-s)Cu(s)ds = 0,$$

取 $u(s) = [\eta^T DX(T-s)C]^T$, 则

$$\int_0^T \eta^T DX(T-s)C[\eta^T DX(T-s)C]^T ds = 0.$$

由 $X(t)$ 的绝对连续得

$$\eta^T DX(T-s)C = 0$$

再由 (3.5) 得 (3.4) 成立.

分别对 (3.4) 的每个方程逐次微分并令 $s = T$, 得

$$\begin{aligned}&\eta^T DE_i A_i^j C_i = 0,\\&\qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, n(i+1)-1; i = 0, 1, 2, \cdots, k)\end{aligned} \tag{3.9}$$

由 (3.8),(3.9) 得 $\eta^T W(T) = 0$, 这与秩 (W(T))= l 矛盾. 定理 3.3 证毕.

由定理 3.3 不难证明

定理 3.4　对于任何 $T > 0$ 系统 (3.2) 为在 T 完全输出能控的充要条件为由常微分方程确定的动力系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Cu(t), & t \in (0, T], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-1, 0], \\ y(t) = Dx(t) + Eu(t), & t \in [-1, T] \end{cases} \tag{3.10}$$

为完全输出能控的.

对于系统 (3.2), 我们还有

定理 3.5　设 $T_1 \geq T_2 > 0$, 如果系统 (3.2) 为在 T_2 为完全输出能控, 则必在 T_1 为完全输出能控.

证明: 设有一个 k_0 使 $T_2 \in [k_0, k_0+1)$. 如果 $T_1 \in [k_0, k_0+1)$ 则

$$\begin{aligned} W(T_1) \quad &= [DE_0C_0, DE_0A_0C_0, \cdots, DE_0A_0^{n-1}C_0, \\ &\quad \cdots, DE_{k_0}C_{k_0}, \cdots, \\ &\quad DE_{k_0}A_{k_0}^{n(k_0+1)-1}C_{k_0}, E] \\ &= W(T_2). \end{aligned}$$

定理的结论显然成立.

如果 $T_1 \notin [k_0, k_0+1)$, 则必然存在整数 $t_1 > t_0$ 使 $T_1 \in [k_1, k_1+1)$, 则

$$\begin{aligned} W(T_1) = \quad & [DE_0C_0, DE_0A_0C_0, \cdots, DE_0A_0^{n-1}C_0, \cdots, \\ & DE_{k_0}C_{k_0}, \cdots, DE_{k_0}A_{k_0}^{n(k_0+1)-1}C_{k_0}, \\ & \cdots, DE_{k_1}C_{k_1}, \cdots, DE_{k_1}A_{k_1}^{n(k_1+1)-1}C_{k_1}, E], \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} W(T_2) = [&DE_0C_0, DE_0A_0C_0, \cdots, DE_0A_0^{n-1}C_0, \\ &\cdots, DE_{k_0}C_{k_0}, \cdots, DE_{k_0}A_{k_0}^{n(k_0+1)-1}C_{k_0}, E] \end{aligned}$$

的秩为 l, 而 $W(T_1)$ 为 l 行矩阵, $W(T_2)$ 为 $W(T_1)$ 的子阵, 故 $W(T_1)$ 的秩也为 l. 由定理 3.3 得本定理的结论成立.

§5.4 中立型线性控制系统的能控性

我们注意到，在许多实际控制系统中，往往会遇到含有滞后的状态变量的导数的现象. 例如，在某企业的生产过程中，产品的产量 $x(t)$ 的变化率 $\dot{x}(t)$ 不仅与时刻 t 的产量 $x(t)$ 和控制变量 $u(t)$(政策变量) 有关，而且还应该与前一时期的产量 $x(t-1)$ 及其变化率 $\dot{x}(t-1)$ 有很大关系.

可见，系统中含有前一时期的状态变量的导数这一项，对系统来说至关重要. 因而，很有必要对含有这一项的控制系统，即中立型控制系统作大量的讨论.

本节通过对中立型线性控制系统的深入研究，给出了这类系统的能控的充分必要条件；特别地又给出了若干有效、实用的代数判据.

本节主要考虑的系统是

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + D\dot{x}(t-1) = Ax(t) + Bx(t-1) + Cu(t), \\ \qquad\qquad\qquad t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), \qquad -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

这里 $x(t) \in R^n$ 为状态变量， $u(t) \in R^r$ 为可容的 (在每个有限区间内平方可积) 控制向量， $A, B, D \in R^{n\times n}, C \in R^{n\times r}$ 均为常数矩阵.

定义 4.1　如果存在矩阵函数 $X(t)$ 满足

$$\begin{cases} \dot{X}(t) + D\dot{X}(t-1) = AX(t) + BX(t-1), \quad t \geq 0, \\ X(t) = \begin{cases} I, & t = 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \end{cases} \tag{4.2}$$

这里 $I \in R^{n\times n}$ 为单位矩阵. 则称 $X(t)$ 为系统 (4.1) 的基础解.

定义 4.2　对于中立型控制系统 (4.1), 我们称集合

$$\mathcal{R}(T) = \{x \in R^n / x = x(T), u(t)\text{可容}, \varphi = 0\}$$

为其在时刻 T 的可达集.

定理 4.1　系统 (4.1) 为在 $T > 0$ 能控的充要条件是由

$\eta^T X(T-s)C = 0, (s \in [0,T])$

可推出 $\eta = 0$, 这里 $X(T,s)$ 为基础解.

定理 4.2　中立型线性控制系统 (4.1) 为在 T 能控的充要条件是矩阵

$$\begin{aligned} H(T) = \ & [E_0D_0, E_0C_0D_0, \cdots, E_0C_0^{n-1}D_0, \\ & \cdots, \\ & E_kD_k, \cdots, E_kC_k^{n(k+1)-1}D_k] \end{aligned}$$

的秩为 n. 这里

$D_i = Z_i(0)C, i = 1, 2, \cdots; T \in [k, k+1)$,

$$Z_k(0) = \begin{pmatrix} I \\ e^{C_{k-1}} Z_{k-1}(0) \end{pmatrix},$$

$Z_0(0) = I, \quad C_k = B_k^{-1} A_k$,

$$B_k=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D & I & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D & I \end{pmatrix},$$

$$A_k=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B & A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & A \end{pmatrix}.$$

定理 4.1 和定理 4.2 的证明可参阅文献 [103], 这里从略.

下面我们举例说明定理 4.2 的应用.

例 4.1 讨论二维中立型线性控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)-\dot{x}_1(t-1)=x_1(t)+x_1(t-1)+u(t) \\ \dot{x}_2(t)-\dot{x}_2(t-1)=x_2(t)+u(t) \end{cases}$$

的能控性.

对照系统 (4.1) 我们有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

当 $T<1$ 时，我们可求得

$$H(T)=[E_0D_0,E_0C_0D_0]=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

秩 (H(T))= $1<2$, 故由定理 4.2 得, 这时系统在 T 点是不能控的.
当 $T>1$ 时，我们可求得

$$\begin{aligned}H(T)&=[E_0D_0,E_0C_0D_0,E_1D_1,E_1C_1D_1,\cdots]\\&=\begin{pmatrix}1&1&e&2+e&\cdots\\1&1&e&1+e&\cdots\end{pmatrix},\end{aligned}$$

秩 (H(T))= 2, 故由定理 4.2 得，这时系统为在 T 点能控的.

由定理 4.2, 我们还可以得到如下定理:

定理 4.3　如果中立型线性控制系统 (4.1) 为在 $T_1>0$ 能控的，则对 $T\geq T_1$, 该系统在 T 处也为能控的.

定理 4.4　如果滞后线性控制系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-1)+Cu(t), & t\geq 0,\\x(t)=\varphi(t), & -1\leq t\leq 0\end{cases}$$

在任何 $T>0$ 点上都能控，则对应的中立型线性系统 (4.1) 也在任何 $T>0$ 点上都能控.

定理 4.4　如果中立型控制系统 (4.1) 对应的由常微分方程确定的控制系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Cu(t), & t\geq 0,\\x(t)=\varphi(t), & -1\leq t\leq 0\end{cases}$$

在任何 $T>0$ 点上都能控，则中立型线性系统 (4.1) 也在任何 $T>0$ 点上都能控.

§5.5 非线性中立型控制系统的函数能控性

上一节，我们讨论了中立型线性控制系统的欧氏空间的能控性，并给出了一些结果. 本节将就更为复杂的非线性中立型控制系统，给出其函数能控性和零函数能控性的有关概念和判定定理. 这将为系统的设计、分析提供更为有效的工具.

本节主要考虑非线性中立型控制系统:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x(t)+D(t)x(t-h))=f(t,x(t),x(t-h),u(t)), \\ \qquad\qquad\qquad t\geq t_0, \\ x(t)=\varphi(t), \qquad t_0-h\leq t\leq t_0, \end{cases} \tag{5.1}$$

这里 $x(t)\in R^n$ 为状态变量， $u(t)\in R^m$ 为可容的 (在每个有限区间内为可测有界的) 控制向量， h 为正的常数； f 关于其所有的变元都有连续的一阶偏导数，而且 $f(t,0,0,0)\equiv 0$;$D(t)$ 为 $n\times n$ 函数矩阵，其元素均有连续的一阶导数.

设 $\mathcal{B}$ 为一个定义在 $[t_0-h,t_0]$ 上的 n 维连续向量函数组成的 Banach 空间，其模定义为

$$||\varphi||=\max_{t\in[t_0-h,t_0]}|\varphi|, \qquad \varphi\in\mathcal{B}.$$

由 [1][2] 可知，对于任何 $\varphi\in\mathcal{B}$, 系统 (5.1) 的解存在且唯一.

定义 5.1　设

$$A(t)=\tfrac{\partial f(t,0,0,0)}{\partial x(t)}\triangleq\tfrac{\partial f}{\partial x(t)}\Big|_{x(t)\equiv x(t-h)\equiv u(t)\equiv 0},$$
$$B(t)=\tfrac{\partial f(t,0,0,0)}{\partial x(t-h)}\triangleq\tfrac{\partial f}{\partial x(t-h)}\Big|_{x(t)\equiv x(t-h)\equiv u(t)\equiv 0},$$
$$C(t)=\tfrac{\partial f(t,0,0,0)}{\partial u(t)}\triangleq\tfrac{\partial f}{\partial u(t)}\Big|_{x(t)\equiv x(t-h)\equiv u(t)\equiv 0},$$

则称线性中立型控制系统

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}(x(t)+D(t)x(t-h))\\ \qquad =A(t)x(t)+B(t)x(t-h)+C(t)u(t),\\ \qquad\qquad t_0<t,\\ x(t)=\varphi(t),\qquad t_0-h\le t\le t_0\end{cases}\tag{5.2}$$

为非线性中立型控制系统 (5.1) 关于零解的一阶变分系统.

设 $\mathcal{K}$ 为一个 $[t_0-h,t_0]$ 上函数全体构成的赋范线性空间，则我们有

定义 5.2　设 $\alpha\in\mathcal{K}$; $x^0(\cdot,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha),(\varphi_\alpha\in\mathcal{B})$ 为系统 (5.1) 的一个满足当 $t\in[t_1,t_1+h]$ 时

$$x^0(t,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha)=\alpha(t-t_1+t_0-h)$$

的轨迹，如果

$$A(t)=\tfrac{\partial f(t,x^0(t,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha),x^0(t-h,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha),u_\alpha(t))}{\partial x(t)},$$
$$B(t)=\tfrac{\partial f(t,x^0(t,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha),x^0(t-h,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha),u_\alpha(t))}{\partial x(t-h)},$$
$$C(t)=\tfrac{\partial f(t,x^0(t,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha),x^0(t-h,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha),u_\alpha(t))}{\partial u(t)},$$

则称线性中立型控制系统 (5.2) 为系统 (5.1) 关于轨迹 $x^0(\cdot,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha)$ 的一阶变分系统.

定义 5.3　设 $\psi(\cdot)\in\mathcal{K}$, 如果对给定的 $\varphi\in\mathcal{B}$, 存在一个时刻 t_1,$t_0<t_1<\infty$, 和一个可容控制线段 $u_{[t_0,t_1+h]}$, 使得系统 (5.1) 的以

t_0 为初始时刻, 以 φ 为初始函数, $u_{[t_0,t_1+h]}$ 为控制的解 $x(t,t_0,\varphi,u)$ 在 $t\in[t_1,t_1+h]$ 上满足 $x(t,t_0,\varphi,u)=\psi(t-t_1+t_0-h)$, 则称系统 (5.1) 关于初始函数空间 $\mathcal{B}$ 函数 $\psi(\cdot)\in\mathcal{K}$ 能控的. 若 $\psi(\cdot)\equiv 0$, 则称系统 (5.1) 为零函数能控的.

定义 5.4 如果系统 (5.1) 关于 $\mathcal{B}$ 的零函数一个邻域 $N(0^{\mathcal{B}})$ 为零函数能控的, 则称系统 (5.1) 为关于 $\mathcal{B}$ 局部零函数能控的.

定义 5.5 设 $\alpha\in\mathcal{K}$, 如果对给定的 t_0 和 $\varphi_\alpha\in\mathcal{B}$, u_α 可容, 及 (5.1) 的一个轨迹 $x(\cdot,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha)$, 使得对 $t_1>t_0$, 当 $t\in[t_1,t_1+h]$ 有 $x(t,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha)=\alpha(t-t_1+t_0-h)$ 则存在 φ_α 的一个邻域 $N(\varphi_\alpha)$, 使得对任何 $\varphi\in N(\varphi_\alpha)$, 存在一个定义在 $[t_0,t_1+h]$ 上的可容控制 u^*, 使在 $t\in[t_1,t_1+h]$ 上有 $x(t,t_0,\varphi,u^*)=\alpha(t-t_1+t_0-h)$, 则称系统 (5.1) 关于初始函数空间 $\mathcal{B}$ 局部函数 α 能控的.

引理 5.1 系统 (5.2) 的解 $x(t,t_0,\varphi_\alpha,u)$ 可表示为

$$x(t,t_0,\varphi,u)=M(t,t_0,\varphi)+\int_{t_0}^{t}Y(s,t)C(s)u(s)ds, \tag{5.3}$$

其中 $M(t,t_0,\varphi)$ 为与 (5.2) 对应的齐次方程

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}(x(t)+D(t)x(t-h))=A(t)x(t)+B(t)x(t-h),\\ \qquad\qquad t_0<t,\\ x(t)=\varphi(t), \qquad t_0-h\le t\le t_0\end{cases}$$

的解, $Y(s,t)$ 为 (5.2) 的基础解 [1][2].

该引理的证明参见文献 [1][2].

引理 5.2 对于系统 (5.2) 如果存在 $t_1>t_0$, 使得

$$rank\int_{t_0}^{t_1}Y(s,t_1)C(s)C'(s)Y'(s,t_1)ds=n, \tag{5.4}$$

则存在一个可容控制 $u(t)$ 使得该系统的解在有限时刻达到零, 即存在 t_1 使 $x(t_1)=0$.

证明：设 $E(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}Y(s,t_1)C(s)C'(s)Y'(s,t_1)ds$, 在 (5.3) 中取

$$u(s)=-C'(s)Y'(s,t_1)E^{-1}(t_0,t_1)M(t_1,t_0,\varphi),$$

则 $x(t_1)=0$.

定理 5.1　在线性中立型控制系统 (5.2) 中，如果满足

(i) 存在 $t_1>t_0$ 使得 (5.4) 成立;

(ii) 对 $\varphi\in\mathcal{B}$ 和 (i) 中的 t_1 及使 $x(t_1,t_0,\varphi,u_{[t_0,t_1]})=0$ 的可容控制 $u_{[t_0,t_1]}$, 方程

$$\begin{aligned}C(t)u(t)= & -B(t)x(t-h,t_0,\varphi,u_{[t_0,t_1]})\\ & +\tfrac{d}{dt}(D(t)x(t-h,t_0,\varphi,u_{[t_0,t_1]}))\end{aligned}\tag{5.5}$$

在 (t_1,t_1+h) 存在可容解 $u(\cdot)$, 则该系统为关于 $\mathcal{B}$ 零函数能控的.

证明：由引理 5.2, 对任意 $\varphi\in\mathcal{B}$, 存在 $u_{[t_0,t_1]}$ 使

$$x(t_1,t_0,\varphi,u_{[t_0,t_1]})=0.$$

如 (5.5) 成立，则在区间 $[t_1,t_1+h]$ 上，系统 (5.2) 变成

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t),\\ x(t_1)=0,\end{cases}$$

由常微分方程解的唯一性得，对所有 $t\in[t_1,t_1+h]$, 都有 $x(t)=0$.

定理 5.2　在线性中立型控制系统 (5.2) 中，如果满足

(i) 存在 $t_1>t_0$ 使得 (5.4) 成立;

(ii) 对 (i) 中的 t_1 存在两个 $n\times m$ 矩阵函数 $D_1(t),D_2(t)$, 使得在 $[t_1,t_1+h]$ 上几乎处处有

$$\begin{aligned}&B(t)-\tfrac{dD(t)}{dt}=C(t)D_1(t),\\ &D(t)=C(t)D_2(t),\end{aligned}$$

则该系统为关于 $\mathcal{B}$ 零函数能控的.

该定理的证明可由定理 5.1 直接得到，这里从略.

关于线性中立型系统的函数能控性，我们用定理 5.1 的方法证明：

定理 5.3 在线性中立型控制系统 (5.2) 中，设 $L_t(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot) - A(t)(\cdot)$,$\alpha \in \mathcal{K}$, 且满足

(i) 存在 $t_1 > t_0$ 使得 (5.4) 成立;

(ii) 对 $\varphi \in \mathcal{B}$ 和 (i) 中的 t_1 及使 $x(t_1, t_0, \varphi, u_{[t_0,t_1]}) = \alpha(t_0 - h)$ 的可容控制 $u_{[t_0,t_1]}$, 方程

$$\begin{aligned} C(t)u(t) \quad &= (L_t\alpha)(t - t_1 + t_0 - h) \\ &\quad -B(t)x(t - h, t_0, \varphi, u_{[t_0,t_1]}) \\ &\quad +\frac{d}{dt}(D(t)x(t - h, t_0, \varphi, u_{[t_0,t_1]})) \end{aligned}$$

在 $(t_1, t_1 + h)$ 存在可容解 $u(\cdot)$, 则该系统 (5.2) 为关于 $\mathcal{B}$ 函数 α 能控.

对于非线性中立型控制系统，我们可以证明 [104]:

定理 5.4 在非线性中立型控制系统 (5.1) 中，如果其关于零解的一阶变分系统 (5.2) 满足:

(i) 存在 $t_1 > t_0$ 使得 (5.4) 成立;

(ii) 对 (i) 中的 t_1 存在两个 $n \times m$ 矩阵函数 $D_1(t), D_2(t)$, 使得在 $[t_1, t_1 + h]$ 上几乎处处有

$$\begin{aligned} &B(t) - \frac{dD(t)}{dt} = C(t)D_1(t), \\ &D(t) = C(t)D_2(t), \end{aligned}$$

则该系统为关于 $\mathcal{B}$ 局部零函数能控的.

证明：设在 $[t_0, t_1 + h]$ 上的控制为如下形式

当 $t_0 \le t \le t_1$ 时,

$$u^\xi(t) = u(t, \xi) = C'(t)Y'(t, t_1)\xi,$$

当 $t_1 < t < t_1 + 1$ 时，由 (ii), 方程

$$C(t)u(t) = \quad -B(t)x(t-h, t_0, 0^{\mathcal{B}}, u^{\xi}_{[t_0,t_1]}) + \tfrac{d}{dt}(D(t)x(t-h, t_0, 0^{\mathcal{B}}, u^{\xi}_{[t_0,t_1]}))$$

必存在可容解，我们仍设为 $u^{\xi}(t) = u(t,\xi)$, 其中 $0^{\mathcal{B}}$ 为空间 $\mathcal{B}$ 中零子集.

显然当 $t \in [t_0, t_1]$ 时，$u^{)}(t) = 0)$.

如果 $\varphi \equiv 0$, 在 $[t_0 - h, t_1]$ 上 $x(t, t_0, 0^{\mathcal{B}}, u^0) = 0$.

设

$$J(t) = \frac{\partial x(t, t_0, 0^{\mathcal{B}}, u^{\xi})}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0},$$

因 $\varphi \equiv 0$, 则 (5.1) 的解可写作

$$\begin{aligned} &x(t, t_0, 0^{\mathcal{B}}, u^{\xi}) + D(t)x(t-h, t_0, 0^{\mathcal{B}}, u^{\xi}) \\ &\quad = \textstyle\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), x(\tau - h), u(\tau))d\tau, \\ &\qquad t_0 \le t \le t_1 + h. \end{aligned}$$

两边关于 ξ 求偏导可得

$$\begin{aligned} &J(t) + D(t)J(t-h) \\ &\quad = \tfrac{\partial x(t)}{\partial \xi} + D(t)\tfrac{\partial x(t)}{\partial \xi} \\ &\quad = \textstyle\int_{t_0}^{t}\big(\tfrac{\partial f(\tau,0,0,0)}{\partial x(\tau)}\tfrac{\partial x(\tau)}{\partial \xi} \\ &\qquad + \tfrac{\partial f(\tau,0,0,0)}{\partial x(\tau-h)}\tfrac{\partial x(\tau-h)}{\partial \xi} + \tfrac{\partial f(\tau,0,0,0)}{\partial u(\tau)}\tfrac{\partial u(\tau)}{\partial \xi}\big)\big|_{\xi=0}d\tau \\ &\quad = \textstyle\int_{t_0}^{t}(A(\tau)J(\tau) + B(\tau)J(\tau - h) \\ &\qquad + C(\tau)\tfrac{\partial u(\tau,0)}{\partial \xi})d\tau, \end{aligned}$$

两边关于 t 求导可得

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}(J(t) + D(t)J(t-h)) \\ &\quad = A(t)J(t) + B(t)J(t-h) + C(t)\tfrac{\partial u(t,0)}{\partial \xi} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A(t)J(t) + B(t)J(t-h) \\
&\quad + \begin{cases} C(t)C'(t)Y'(t,t_1), \\ \qquad\qquad t_0 \le t \le t_1, \\ -BJ(t-h) + \frac{d}{dt}(D(t)J(t-h)), \\ \qquad\qquad t_1 < t \le t_1 + h. \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

则在 $[t_0, t_1]$ 上，方程 (5.6) 的解为

$$
J(t) = \int_{t_0}^{t} Y(t,s)C(s)C'(s)Y'(s,t)ds
$$

由条件 (ii) 得 $J(tt_1) \neq 0$.

则在 $(t_1, t_1 + h)$ 内，(5.6) 变为

$$
\dot{J} = A(t)J(t)
$$

由于 $J(t_1) \neq 0$, 则在 $[t_1, t_1 + h]$ 上 $J(t_1) \neq 0$. 由文献 [94] 的定理 6 得 ξ 作为 φ 的函数，使得 $t_1 \le t \le t_1 + h$ 时 $x(t; t_0, \varphi, \xi) = 0$. 定理 5.4 证毕.

定理 5.5　在非线性中立型控制系统 (5.1) 中，如果其关于定义 5.5 中的轨迹 $x(t, t_0, \varphi_\alpha, u_\alpha)$ 的一阶变分系统 (5.2) 满足:

(i) 对于定义 5.5 的 t_1,(5.4) 成立;

(ii) 对于如上的 t_1,$(L_t\alpha)(t - t_1 + t_0 - h)$ 在 $(t_1, t_1 + h]$ 内几乎处处属于 $C(t)$ 的值域;

(iii) 存在两个 $n \times m$ 矩阵函数 $D_1(t), D_2(t)$, 使得在 $[t_1, t_1 + h]$ 上几乎处处有

$$
\begin{aligned}
B(t) - \tfrac{dD(t)}{dt} &= C(t)D_1(t), \\
D(t) &= C(t)D_2(t),
\end{aligned}
$$

则该系统为关于 $\mathcal{B}$ 局部零函数能控的.

证明：设 $x^0(t)=x^0(t;t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha)$.

在 (5.1) 中作变换 $x(t)=y(t)+x^0(t)$, 则 (5.1) 可写作

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}(y(t)+D(t)x^0(t-h)\\&\quad=-\tfrac{d}{dt}(x^0(t)+D(t)x^0(t-h))\\&\quad\quad+f(t,x(t),x(t-h),u(t)).\end{aligned}\tag{5.7}$$

如果 $x(t)$ 的初始函数为 φ_α, 则 $y(t)$ 的初始函数为 0 函数．我们有

$$\begin{aligned}y(t)+D(t)x^0(t-h)=&-(x^0(t)+D(t)x^0(t-h))\\&+\textstyle\int_{t_0}^t f(\tau,x(\tau),x(\tau-h),u(\tau))d\tau.\end{aligned}\tag{5.8}$$

设，当 $t_0\le t\le t_1$ 时

$$u^\xi(t)=u(t,\xi)=u_\alpha+C'(t)Y'(t,t_1)\xi,$$

当 $t_1<t<t_1+1$ 时，由 (ii), 方程

$$u^\xi(t)=u(t,\xi)=u_\alpha+u^*(t).$$

其中 $u^*(t)$ 为方程

$$\begin{aligned}C(t)u(t)\quad&=-B(t)y(t-h,t_0,0^B,u^\xi_{[t_0,t_1]})\\&\quad+\tfrac{d}{dt}(D(t)y(t-h,t_0,0^B,u^\xi_{[t_0,t_1]}))\end{aligned}$$

的解.

设相应于 $u^\xi(t)$, 方程 (5.7) 的解为 $y(t,t_0,\xi)$.

显然 $u^0(T)=u_\alpha$, 且 $y(t,t_0,0)=0$.

定义

$$J(t)=\frac{\partial y(t,t_0,0^B,u^\xi)}{\partial\xi}|_{\xi=0},$$

由 (5.8) 得

$$
\begin{aligned}
J(t)+D(t)J(t-h)= \quad & \int_{t_0}^{t}(A(\tau)J(\tau) \\
& +B(\tau)J(\tau-h) \\
& +C(\tau)\tfrac{\partial u(\tau)}{\partial \xi}|_{\xi=0})d\tau.
\end{aligned}
$$

用证明定理 5.4 的类似的方法可证得对所有的 $t\in[t_1,t_1+h]$ 都有 $J(t)\neq 0$, 且 ξ 作为 φ 的函数，使得 $t_1<t<t_1+h$ 时,

$$
y(t;t_0,\varphi,\xi)=0. \tag{5.9}
$$

由定义，当 $t\in(t_1,t_1+h]$ 时,

$$
\begin{aligned}
y(t;t_0,\varphi,\xi) \quad &= x(t;t_0,\varphi^*,\xi)-x^0(t;t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha) \\
&= x(t;t_0,\varphi^*,\xi)-\alpha(t-t_1+t_0-h).
\end{aligned}
$$

这里 $\varphi^*=\varphi-\varphi_\alpha$.

由 (5.9) 可得，对所有 φ_α, 方程

$$
\begin{aligned}
x(t;t_0,\varphi^*,\xi)= \quad & \alpha(t-t_1+t_0-h), \\
& t\in(t_1,t_1+h]
\end{aligned}
$$

都有一个解 $\xi=\psi(\varphi^*)$, 故定理 5.5 成立.

注 本节仅讨论单时滞中立型控制系统只是为了方便, 对多时滞中立型系统可类似地讨论.

第六章 时滞系统的最优控制问题

本章，我们分四节叙述，分别简单介绍我们研究时滞系统一般化最优控制，状态右端受限的滞后控制系统的最优控制，中立型线性控制系统的最优控制和时滞现金管理系统的最优控制等问题时所得到的主要结论.

§6.1 滞后非线性系统的一般化最优控制

本节将就滞后非线性控制系统，给出一般化的最优控制问题的最大值原理及一种新的、简明的证明. 作为应用给出了一种特殊形式的最大值原理.

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), x(t-1), u(t), t), & t_0 \le t \le t_1, \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - 1 \le t \le t_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

如无特别说明，我们总假定 $u(t)$ 给定时， (1.1) 的解存在且关于 $u(t)$ 具连续依赖性.

所要讨论的一般化的最优控制问题就是求系统 (1.1) 关于一般化性能指标

$$J(t_1) = C_1x_1(t_1) + C_2x_2(t_1) + \cdots + C_nx_n(t_1) = Cx(t) \tag{1.2}$$

的最优控制问题. 这里

$C = (C_1, C_2, \cdots, C_n),$

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T.$

类似于文献 [12] 的证明可得, 最速控制和积分型最优控制等许多最优控制问题都可化为一般化的最优控制问题, 这在线性系统中一般是办不到的.

系统 (1.1) 关于 (1.2) 的伴随方程为

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = -\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)} \\ \qquad\qquad -\eta(t+1)\frac{\partial f(x(t+1),x(t),u(t+1),t+1)}{\partial x(t)}, \\ \qquad\qquad\qquad t_0 \le t \le t_1 - 1, \\ \dot{\eta}(t) = -\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}, \\ \qquad\qquad\qquad t_1 - 1 \le t \le t_1, \\ \eta(t_1) = -C, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \cdots, \eta_n(t))$ 称为共态向量. 相应的哈密顿函数为

$$H(x(t), x(t-1), \eta(t), u(t), t) = \eta(t) f(x(t), x(t-1), u(t), t). \tag{1.4}$$

定理 1.1 设 $u(t)$ 是一个容许控制, $x(t)$ 为相应的轨线, $\eta(t)$ 是相应的共态变量. 则 $u(t)$ 和 $x(t)$ 分别为最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$ 的必要条件是 $H(x(t), x(t-1), \eta(t), u(t), t)$ 对每个 $t \in [t_0, t_1]$ 必在 $u = u^*(t)$ 处达到最大值, 即

$$H(x(t), x(t-1), \eta(t), u^*(t), t) = \max_{u \in \Omega} H(x(t), x(t-1), \eta(t), u(t), t),$$

其中 Ω 为给定的约束集.

证明: 设 $u^*(t)$ 为最优控制, 给 $u^*(t)$ 一个微小变分 $\delta u(t)$, 则 $x^*(t)$ 也将有一个相应的变化, 设为 $\delta x(t)$. 由 (1.1) 得

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), x^*(t-1), u^*(t), t),$$

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) \quad &+\delta\dot{x}^*(t) = f(x^*(t) + \delta x(t), \\ &x^*(t-1) + \delta x(t-1), u^*(t) + \delta u(t), t),\end{aligned}$$

两式相减，乘以 $\eta(t)$ 并求积分得

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \eta(t)\delta\dot{x}(t)dt = \quad &\int_{t_0}^{t_1} \eta(t)[f(x^*(t) + \delta x(t), x^*(t-1) \\ &+\delta x(t-1), u^*(t) + \delta u(t), t) \\ &-f(x^*(t), x^*(t-1), u^*(t), t)]dt,\end{aligned}$$

而

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta(t)\delta\dot{x}(t)dt = \eta(t)\delta x(t)|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}(t)\delta x(t)dt,$$

由于 $\delta x(t_0) = \delta\varphi(t_0) = 0$,($\varphi(t_0)$ 与 $u(t)$ 无关), 我们有

$$\begin{aligned}\eta(t_1)\delta x(t_1) \quad &= \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}(t)\delta x(t)dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \eta(t)[f(x^*(t) + \delta x(t), x^*(t-1) \\ &+\delta x(t-1), u^*(t) + \delta u(t), t) \\ &-f(x^*(t), x^*(t-1), u^*(t), t)]dt,\end{aligned} \tag{1.5}$$

由 (1.3) 得

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}(t)\delta x(t)dt &= \int_{t_0}^{t_1-1} \dot{\eta}(t)\delta x(t)dt + \int_{t_1-1}^{t_1} \dot{\eta}(t)\delta x(t)dt \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} \eta(t)\frac{\partial f(x^*(t),x^*(t-1),u^*(t),t)}{\partial x^*(t)}\delta x(t)dt \\ &\quad -\int_{t_0+1}^{t_1} \eta(t)\frac{\partial f(x^*(t),x^*(t-1),u^*(t),t)}{\partial x^*(t-1)}\delta x(t-1)dt.\end{aligned}$$

因为 $\varphi(t)$ 与 $u(t)$ 无关, 所以当 $t \le t_0+1$ 时, $\delta x(t-1) = \delta\varphi(t-1) = 0$, 从而

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \dot\eta(t)\delta x(t)dt &= -\int_{t_0}^{t_1} \eta(t)\tfrac{\partial f(x^*(t),x^*(t-1),u^*(t),t)}{\partial x^*(t)}\delta x(t)dt \\ &\quad -\int_{t_0}^{t_1} \eta(t)\tfrac{\partial f(x^*(t),x^*(t-1),u^*(t),t)}{\partial x^*(t-1)} \\ &\quad \delta x(t-1)dt,\end{aligned} \tag{1.6}$$

由于 $x(t)$ 关于 $u(t)$ 可微, 故

$$\begin{aligned}&f(x^*(t)+\delta x(t), x^*(t-1)+\delta x(t-1), u^*(t)+\delta u(t), t) \\ &\quad = f(x^*(t), x^*(t-1), u^*(t)+\delta u(t), t) \\ &\quad\quad + \tfrac{\partial f(x^*(t),x^*(t-1),u^*(t)+\delta u(t),t)}{\partial x^*(t)}\delta x(t) \\ &\quad\quad + \tfrac{\partial f(x^*(t),x^*(t-1),u^*(t)+\delta u(t),t)}{\partial x^*(t-1)} \\ &\quad\quad \delta x(t-1) + O(\delta u(t)),\end{aligned} \tag{1.7}$$

其中 $O(\delta u(t))$ 为 $\delta u(t)$ 的无穷高阶小量. 由 (1.5)(1.6)(1.7) 得

$$\begin{aligned}\Delta J &\triangleq C(x^*(t_1) \\ &\quad +\delta x(t_1)) - Cx^*(t_1) = C\delta x(t_1) = -\eta(t_1)\delta x(t_1) \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} \eta(t)[f(x^*(t), x^*(t-1), u^*(t)+\delta u(t), t) \\ &\quad -f(x^*(t), x^*(t-1), u^*(t), t)]dt + \varepsilon \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} H(x^*(t), x^*(t-1), \eta(t), u^*(t)+\delta u(t), t) \\ &\quad -H(x^*(t), x^*(t-1), \eta(t), u^*(t), t)]dt \\ &\quad +\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 ε 为关于 $\delta u(t)$ 的无穷小量.

J 取极小值的条件是, 对于微小的 $\delta u(t)$ 都有

$$\Delta J \ge 0. \tag{1.8}$$

如果存在区间 $[t_a,t_b]\subset[t_0,t_1]$, 使得在 $[t_a,t_b]$ 上，哈密顿函数 H 不满足最大值原理，即对 $u^*(t)$ 的充分小的变化 δu_1, 有

$$H(x^*(t),x^*(t-1),\eta(t),u^*(t)+\delta u(t),t)$$
$$-H(x^*(t),x^*(t-1),\eta(t),u^*(t),t)>\alpha$$

在 $[t_a,t_b]$ 上成立，其中 α 为正的常数. 令

$$\delta u(t)=\begin{cases}\delta u_1(t), & t\in[t_a,t_b],\\ 0, & t\notin[t_a,t_b],\end{cases}$$

这时

$$\begin{aligned}\Delta J &= -\int_{t_a}^{t_b} H(x^*(t),x^*(t-1),\eta(t),u^*(t)+\delta u_1(t),t)\\ &\quad -H(x^*(t),x^*(t-1),\eta(t),u^*(t),t)]dt+\varepsilon\\ &< -\alpha(t_b-t_a)+\varepsilon,\end{aligned}$$

如取 δu_1 充分小, 则 $\delta u(t)$ 也充分小, 可使 ε 充分小, 使得 $\Delta J<0$, 这与 (1.8) 矛盾. 定理 1.1 证毕.

对于系统 (1.1), 如果性能指标为

$$J_1=g(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}F(x(t),x(t-1),u(t),t)dt, \tag{1.9}$$

令

$$x_{n+1}=g(x(t))+\int_{t_0}^{t}F(x(t),x(t-1),u(t),t)dt,$$

则

$$\begin{aligned}\dot{x}_{n+1}(t)= &\ \tfrac{\partial(g(x(t))}{\partial x^T(t)}f(x(t),x(t-1),u(t),t)\\ &+F(x(t),x(t-1),u(t),t),\end{aligned}$$

且 $x_{n+1}(t_0)=g(x(t_0))$, 如取 $C_1=C_2=\cdots=C_n=0, C_{n+1}=1$, 则

$$J_1=\sum_{i=1}^{n+1}C_ix_i(t_1).$$

这时问题化为在系统

$$\left\{\begin{array}{ll}\dot{x}(t) & =f(x(t),x(t-1),u(t),t),\\ & \qquad t_0\le t\le t_1,\\ \dot{x}_{n+1}(t) & =\frac{\partial g(x(t))}{\partial x^T(t)}f(x(t),x(t-1),u(t),t)\\ & \quad +F(x(t),x(t-1),u(t),t),\\ & \qquad t_0\le t\le t_1,\\ x(t) & =\varphi(t),\\ & \qquad t_0-1\le t\le t_0,\\ x_{n+1}(t_0) & =g(x(t_0)),\end{array}\right. \tag{1.10}$$

约束下求 J_1 的最小值的问题.

设 $\bar{\eta}(t_1)=(\eta_1(t),\eta_2(t),\cdots,\eta_n(t))$, 而且 $\eta(t)=\bar{\eta}(t)-\frac{\partial(g(x(t))}{\partial x^T(t)}$, 则可得 (1.1) 关于 (1.9) 的伴随方程为

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\eta}(t)=-\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}\\ \qquad +\frac{\partial F(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}\\ \qquad -\eta(t+1)\frac{\partial f(x(t+1),x(t),u(t+1),t+1)}{\partial x(t)}\\ \qquad +\frac{\partial F(x(t+1),x(t),u(t+1),t+1)}{\partial x(t)},\\ \qquad\qquad t_0\le t\le t_1-1,\\ \dot{\eta}(t)=-\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}\\ \qquad +\frac{\partial F(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)},\\ \qquad\qquad t_1-1\le t\le t_1,\\ \eta(t_1)=-\frac{\partial(g(x(t_1))}{\partial x^T(t_1)},\end{array}\right. \tag{1.11}$$

则相应的哈密顿函数为

$$\begin{aligned}&H_1(x(t),x(t-1),\eta(t),u(t),t)\\&\quad=-F(x(t),x(t-1),u(t),t)\\&\quad\quad+\eta(t)f(x(t),x(t-1),u(t),t),\end{aligned}\tag{1.12}$$

因而由定理 1.1 和上面的讨论可得

定理 1.2　设 $u(t)$ 是一个容许控制，$x(t)$ 为相应的轨线，$\eta(t)$ 是相应于 $u(t)$ 和 $x(t)$ 满足 (1.11) 的共态变量. 则 $u^*(t)$ 和 $x(t)$ 分别为最优控制 $u(t)$ 和最优轨线 $x(t)$ 的必要条件是对每个 $t\in[t_0,t_1]$ 哈密顿函数 (1.12) 必在 $u=u^*(t)$ 处达到最大值.

作为一个特例，我们用定理 1.2 推出文献 [89] 中所讨论的系统 (这里只讨论单滞后量的问题, 关于多滞后量的问题可类似讨论) 和性能指标下的主要结论.

考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A_0(t)x(t)+A_1(t)x(t-1)+B(t)u(t),\\\qquad\qquad t_0\le t\le t_1,\\x(t)=\varphi(t),\qquad t_0-1\le t\le t_0,\end{cases}\tag{1.13}$$

这里 $A_0(t),A_1(t)\in R^{n\times n},B(t)\in R^{n\times r}$, 均为实连续矩阵.

所考虑的性能指标为成本函数

$$C(u)=g(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}\{||x(s)||_W^2+||u(s)||_U^2\}ds,\tag{1.14}$$

这里

$$||x(s)||_W^2\equiv x'(s)W(s)x(s)\ge 0\qquad x\in R^n,$$
$$||u(s)||_U^2\equiv u'(s)U(s)u(s)>0\qquad u\ne 0.$$

如果令 $\bar{\eta}(t)=\frac{1}{2}\eta(t)$, 则伴随方程 (1.11) 可化为

$$\begin{cases}\dot{\bar{\eta}}(t)=-\bar{\eta}(t)A_0(t)-\bar{\eta}(t+1)A_1(t+1)+x^T(t)W(t),\\ \qquad\qquad t_0\le t\le t_1-1,\\ \dot{\bar{\eta}}(t)=-\bar{\eta}(t)A_0(t)+x^T(t)W(t),\\ \qquad\qquad t_1-1\le t\le t_1,\\ \bar{\eta}(t_1)=-\frac{1}{2}grad(g(x(t_1))).\end{cases} \tag{1.15}$$

由 (1.12) 可得，这时的哈密顿函数为

$$\begin{aligned}&H(x(t),x(t-1),\bar{\eta}(t),u(t),t)\\ &\quad=-x^T(t)W(t)x(t)+2\bar{\eta}(t)[A_0(t)x(t)+A_1(t)x(t-1)]\\ &\qquad-u^T(s)U(s)u(s)+2\bar{\eta}B(t)u(t).\end{aligned}$$

因为
$-||u(s)||_U^2+2\bar{\eta}(t)B(t)u(t)=-||u(t)-U^{-1}(t)B^T(t)\bar{\eta}^T(t)||_U^2$
$+||U^{-1}(t)B^T(t)\bar{\eta}^T(t)||_U^2$.

故 $u^*(t)=U^{-1}(t)B^T(t)\bar{\eta}^T(t)$. 这样，我们就推出文献 [89] 中的主要结果:

定理 1.3 考虑线性滞后控制系统 (1.13) 和性能指标 (1.14), 存在方程组

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A_0(t)x(t)+A_1(t)x(t-1)+B(t)U^{-1}(t)B^T(t)\bar{\eta}^T(t),\\ \qquad\qquad t_0\le t\le t_1,\\ \dot{\bar{\eta}}(t)=-\bar{\eta}(t)A_0(t)-\bar{\eta}(t+1)A_1(t+1)+x^T(t)W(t),\\ \qquad\qquad t_0\le t\le t_1-1,\\ \dot{\bar{\eta}}(t)=-\bar{\eta}(t)A_0(t)+x^T(t)W(t),\\ \qquad\qquad t_1-1\le t\le t_1\end{cases}$$

满足条件

$$x(t) = \varphi(t), \qquad t_0 - 1 \le t \le t_0;$$
$$\bar{\eta}(t_1) = -\tfrac{1}{2} grad(g(x(t_1)))$$

的解 $x^*(t)$,$\bar{\eta}^*(t)$ 使 $u^*(t) = U^{-1}(t)B^T(t)\bar{\eta}^{*T}(t)$ 为在 $[t_0, t_1]$ 上的最优控制.

§6.2　状态右端受限的滞后控制系统的最优控制

通常, 我们在讨论滞后微分控制系统的最优控制问题时, 总是假定系统的终点的状态是自由的, 而在实际系统中, 还有大批的滞后控制系统往往要对系统的终点的状态作一些限制. 本节将就状态右端受限的滞后控制系统给出求解最优控制的一般方法. 作为特例, 我们还将就部分状态变量右端完全固定的情况下, 给出求解最优控制的方法. 最后, 我们给出一个例子, 说明本节主要结果的应用. 本节所给的方法和理论对线性滞后控制系统的状态右端受限的最优控制同样适用.

本节我们要考虑的问题是, 求可容控制 (u 属于给定的约束集 Ω), 使得滞后控制系统 (1.1) 在状态右端约束条件

$$\psi_k(x(t_1)) = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots, l; l < n) \tag{2.1}$$

下, 使得性能指标 (1.2) 达到极小值.

对右端受限, 即满足条件 (2.1) 的最优控制问题, 我们可以将性能指标 (1.2) 改写为

$$J(t_1) = Cx(t_1) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \psi_k(x(t_1)), \tag{2.2}$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$ 为待定常数.

显然, 如果约束条件 (2.1) 得到满足时, 性能指标 (1.2) 与 (2.2) 是一致的.

如果在 (1.9) 中令

$$\begin{aligned}&g(x(t_1))=Cx(t_1)+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\psi_k(x(t_1)),\\&F(x(t),x(t-1),u(t),t)\equiv 0,\end{aligned}$$

则 (1.9) 就与 (2.2) 一致了.

这时伴随方程 (1.11) 就化为

$$\begin{cases}\dot\eta(t)=-\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}\\\qquad\qquad-\eta(t+1)\frac{\partial f(x(t+1),x(t),u(t+1),t+1)}{\partial x(t)},\\\qquad\qquad\qquad t_0\le t\le t_1-1,\\\dot\eta(t)=-\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)},\\\qquad\qquad\qquad t_1-1\le t\le t_1,\\\eta(t_1)=-(C+\sum\limits_{k=1}^{l}\lambda_k\frac{\partial\psi_k(x(t_1))}{\partial x^T(t_1)}),\end{cases}\tag{2.3}$$

这里

$$\frac{\partial\psi_k(x(t_1))}{\partial x^T(t_1)}=(\frac{\partial\psi_k(x(t_1))}{\partial x_1^T(t_1)},\frac{\partial\psi_k(x(t_1))}{\partial x_2^T(t_1)},\cdots,\frac{\partial\psi_k(x(t_1))}{\partial x_n^T(t_1)}),$$

则相应的哈密顿函数 (1.12) 可化为

$$\begin{aligned}&H(x(t),x(t-1),\eta(t),u(t),t)\\&\quad=\eta(t)f(x(t),x(t-1),u(t),t).\end{aligned}\tag{2.4}$$

因而由定理 1.2 可得

定理 2.1 设 $u(t)$ 是一个容许控制, $x(t)$ 为相应的轨线, $\eta(t)$ 是相应的共态变量, $\eta(t)$ 是满足 (2.3) 的共态变量. 则 $u(t)$ 和 $x(t)$ 分

别为在状态变量满足右端受限条件 (2.1) 下的最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$ 的必要条件是哈密顿函数 (2.4) 对几乎每个 $t \in [t_0, t_1]$ 必在 $u = u^*(t)$ 处达到最大值.

作为定理 2.1 的特例，我们来讨论滞后控制系统 (1.1) 的某些状态变量的终点状态 $x_k(t_1) \quad (k = 1, 2, \cdots, l) \quad (l \le n)$ 为完全固定的情况下的最优控制问题.

设 $x_k(t_1) = x_{k1}, (k = 1, 2, \cdots, l)$. 其中 x_{k1} 为常数. 这时性能指标 (1.2) 为

$$\begin{aligned} J &= C_1 x_1(t_1) + C_2 x_2(t_1) + \cdots + C_l x_l(t_1) \\ &\quad + \cdots + C_n x_n(t_1) \\ &= C_1 x_{11} + C_2 x_{21} + \cdots + C_l x_{l1} + C_{l+1} x_{(l+1)1}(t_1) \\ &\quad + \cdots + C_n x_n(t_1), \end{aligned}$$

其中前部分

$$C_1 x_{11} + C_2 x_{21} + \cdots + C_l x_{l1}$$

是固定不变的，因而只需考虑性能指标

$$J_1 = C_{l+1} x_{(l+1)1}(t_1) + \cdots + C_n x_n(t_1)$$

即可. 而这相当于在 (1.2) 中取 $C_1 = C_2 = \cdots = C_l = 0$. 前 l 个状态变量终点完全固定，相当于右端受限的条件为

$$\psi_k(x(t_1)) = x_k(t_1) - x_{k1} = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots, l \le n).$$

这样，由定理 2.1, 我们可得

定理 2.2　设 $u(t)$ 是一个容许控制，$x(t)$ 是滞后控制系统 (1.1)

相应于 $u(t)$ 的轨线， $\eta(t)$ 是满足伴随方程

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = -\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)} \\ \qquad\qquad -\eta(t+1)\frac{\partial f(x(t+1),x(t),u(t+1),t+1)}{\partial x(t)}, \\ \qquad\qquad t_0 \le t \le t_1 - 1, \\ \dot{\eta}(t) = -\eta(t)\frac{\partial f(x(t),x(t-1),u(t),t)}{\partial x(t)}, \\ \qquad\qquad t_1 - 1 \le t \le t_1, \\ \eta(t_1) = -(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l, C_{l+1}, \cdots, C_n) \end{cases} \tag{2.5}$$

的共态变量 (其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ 为待定常数), 则 $u(t)$ 和 $x(t)$ 分别为前 l 个状态变量完全固定的条件下的最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$ 的必要条件是对几乎每个 $t \in [t_0, t_1]$, 哈密顿函数

$$H(x(t), x(t-1), \eta(t), u(t), t) = \eta(t) f(x(t), x(t-1), u(t), t)$$

必在 $u = u^*(t)$ 处达到最大值.

由定理 2.2 可见，若状态变量 x_i 的终点完全固定，则相应的共态变量 $\eta_i(t)$ 的终态自由；若状态变量 x_i 的终点状态自由，则与之相应的共态变量 $\eta_i(t)$ 的终态固定.

我们从定理 2.2 还可以看出，定理 2.1 是一个应用范围十分广泛的重要结论，下面我们给出一个例题，进一步说明其应用.

例 2.1 设滞后控制系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t-1) + u(t), & 0 \le t \le 2, \\ \dot{x}_2(t) = u^2(t), & 0 \le t \le 2, \end{cases} \tag{2.6}$$

满足初始条件

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = 1, & -1 \le t \le 0, \\ \varphi_2(t) = 0, & -1 \le t \le 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

求其在右端状态满足约束条件

$$x_1(2)+x_2(2)=1, \tag{2.8}$$

时，使得性能指标

$$J=x_2(2), \tag{2.9}$$

达到最小的最优控制和最优轨线，并且求出 J 的最优值.

这时，由 (2.3) 得 (2.6)(2.7)(2.8) 的伴随方程为

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1(t)=\eta_1(t+1), & 0\le t\le 1, \\ \dot{\eta}_2(t)=0, & 0\le t\le 1, \\ \dot{\eta}_1(t)=0, & 1\le t\le 2, \\ \dot{\eta}_2(t)=0, & 1\le t\le 2, \\ \eta_1(2)=-\lambda, & \\ \eta_2(2)=-1-\lambda, & \end{cases}$$

解之得

$$\eta_1(t)=\begin{cases} -\lambda t, & 0\le t\le 1, \\ -\lambda, & 1\le t\le 2, \end{cases}$$

$$\eta_2(t)=-1-\lambda, \qquad 0\le t\le 2,$$

哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H &=\eta_1(t)[-x_1(t-1)+u(t)]+\eta_2(t)u^2(t) \\ &=-\eta_1(t)x_1(t-1)+\eta_1(t)u(t)+\eta_2(t)u^2(t). \end{aligned}$$

可见，使 H 达最大值的控制为

$$u(t)=-\frac{\eta_1(t)}{2\eta_2(t)}=\begin{cases} -\frac{\lambda t}{2(1+\lambda)} & 0\le t\le 1 \\ -\frac{\lambda}{2(1+\lambda)} & 1\le t\le 2, \end{cases} \tag{2.10}$$

代入 (2.6) 、 (2.7) 得

对

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t-1) + u(t),$$

我们有:

当 $0 \le t \le 1$ 时,

$$\dot{x}_1(t) = -1 - \frac{\lambda t}{2(1+\lambda)},$$

即

$$x_1(t) = 1 - t - \frac{\lambda}{4(1+\lambda)}t^2.$$

当 $1 \le t \le 2$ 时, 由于 $x_1(1) = -\frac{\lambda}{4(1+\lambda)}$, 而且

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -[1-(t-1)-\tfrac{\lambda}{4(1+\lambda)}(t-1)^2] - \tfrac{\lambda}{2(1+\lambda)}\\ &= \tfrac{\lambda}{4(1+\lambda)}(t-1)^2 + (t-1) - 1 - \tfrac{\lambda}{2(1+\lambda)},\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}x_1(t) = \ & \tfrac{\lambda}{12(1+\lambda)}(t-1)^3 + \tfrac{1}{2}(t-1)^2\\ & -\tfrac{2+3\lambda}{2(1+\lambda)}(t-1) - \tfrac{\lambda}{4(1+\lambda)}.\end{aligned}$$

对 $\dot{x}_2(t) = u^2(t)$, 我们有:

当 $0 \le t \le 1$ 时,

$\dot{x}_2(t) = \frac{\lambda^2}{4(1+\lambda)^2}t^2$

且 $x_2(0) = 0$ 得

$x_2(t) = \frac{\lambda^2}{12(1+\lambda)^2}t^3.$

当 $1 \le t \le 2$ 时,

$\dot{x}_2(t) = \frac{\lambda^2}{4(1+\lambda)^2}$

且 $x_2(1) = \frac{\lambda^2}{12(1+\lambda)^2}$ 得

$$x_2(t) = \frac{\lambda^2}{4(1+\lambda)^2}(t-1) + \frac{\lambda^2}{12(1+\lambda)^2},$$

故

$$
\begin{aligned}
x_1(2) &= \tfrac{\lambda}{12(1+\lambda)} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2+3\lambda}{2(1+\lambda)} - \tfrac{\lambda}{4(1+\lambda)} \\
&= -\tfrac{3+7\lambda}{6(1+\lambda)}, x_2(2) = \tfrac{\lambda^2}{4(1+\lambda)^2} + \tfrac{\lambda^2}{12(1+\lambda)^2} \\
&= \tfrac{\lambda^2}{3(1+\lambda)^2}.
\end{aligned}
$$

代入约束条件 (2.8) 得

$$11\lambda^2 + 22\lambda + 9 = 0$$

解之得 $\lambda = \frac{\sqrt{22}-11}{11} = \sqrt{\frac{2}{11}} - 1$,($\lambda = \frac{-\sqrt{22}-11}{11}$ 可类似讨论，这里从略), 故最优控制可由 (2.10) 得到

$$
u(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{22}-2}{4}t, & 0 \le t \le 1, \\ \frac{\sqrt{22}-2}{4}, & 1 \le t \le 2 \end{cases}
$$

最优轨线为

$$
x_1(t) = \begin{cases} 1 - t - \frac{1}{4}(1 - \sqrt{\frac{11}{2}})t^2, \\ \qquad 0 \le t \le 1, \\ \frac{1}{12}(1 - \sqrt{\frac{11}{2}})(t-1)^3 + \frac{1}{2}(t-1)^2 \\ \qquad -\frac{1}{2}(3 - \sqrt{\frac{11}{2}})(t-1) - \frac{1}{4}(1 - \sqrt{\frac{11}{2}}), \\ \qquad 1 \le t \le 2, \end{cases}
$$

$$
x_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\frac{13}{2} - \sqrt{22})t^3 \\ \qquad 0 \le t \le 1 \\ \frac{1}{4}(\frac{13}{2} - \sqrt{22})(t-1) + \frac{1}{12}(\frac{13}{2} - \sqrt{22}), \\ \qquad 1 \le t \le 2. \end{cases}
$$

最小的性能指标为

$$
\begin{aligned}
J &= x_2(2) = \tfrac{1}{4}(\tfrac{13}{2} - \sqrt{22}) + \tfrac{1}{12}(\tfrac{13}{2} - \sqrt{22}) \\
&= \tfrac{1}{3}(\tfrac{13}{2} - \sqrt{22}).
\end{aligned}
$$

§6.3 中立型线性控制系统的最优控制

本节通过对中立型线性控制系统进行深入讨论，给出最大值原理，并举例说明其应用.

我们考虑中立型线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)+\sum_{i=1}^{m}D_i(t)\dot{x}(t-h_i)=\sum_{i=0}^{m}A_i(t)x(t-h_i) \\ \qquad\qquad +B(t)u(t), \qquad t_0\le t\le T, \\ x(t)=\varphi(t), \qquad\qquad t_0-h_m\le t\le t_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

这里 $0=h_0<h_1<h_2<\cdots<h_m<\infty, x(t)\in R^n, u(t)\in R^r, A_i(t)(i=0,1,\cdots,m)$ 皆为 $n\times n$ 实连续矩阵函数; $B(t)\in R^{n\times r}$ 也为实连续矩阵函数; $D_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$ 皆为 $n\times n$ 实可微矩阵函数.

由 [1][2] 我们可以得到，系统 (3.1) 有唯一的连续解，且其响应可表示为

$$x(t)=x(t,\varphi)+\int_{t_0}^{t}Y(s,t)B(s)u(s)ds, \tag{3.2}$$

其中 $x(t,\varphi)$ 为齐次方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t)+\sum_{i=1}^{m}D_i(t)\dot{x}(t-h_i) \\ \qquad =\sum_{i=0}^{m}A_i(t)x(t-h_i), \\ \qquad\qquad t_0\le t\le T, \\ x(t)=\varphi(t), \qquad t_0-h_m\le t\le t_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

的解，而 $Y(s,t)$ 为其基础解 $(t_0 \le s \le t, t_0 \le t \le T)$，即 $Y(s,t)$ 满足方程

$$
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial s}Y(s,t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial s}[Y(s+h_i,t)D_i(s+h_i)] \\
\qquad = -\sum\limits_{i=0}^{m} Y(s+h_i,t)A_i(s+h_i), \\
\qquad\qquad t_0 \le s \le t-h_m, \\
\frac{\partial}{\partial s}Y(s,t) + \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial s}[Y(s+h_i,t)D_i(s+h_i)] \\
\qquad = -\sum\limits_{i=0}^{k} Y(s+h_i,t)A_i(s+h_i), \\
\qquad\qquad t-h_{k-1} \le s \le t-h_k \quad , \\
\qquad\qquad (k=0,1,2,\cdots,(m-1)), \\
Y(s,t) = \begin{cases} 0, & s > t, \\ I, & s = t. \end{cases}
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

由 [1][2] 可知 $Y(s,t)$ 存在、唯一、连续.

定理 3.1　对系统 (3.1)，如果存在伴随方程

$$
\begin{cases}
\dot{\eta}(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{d}{dt}[\eta(t+h_i)D_i(t+h_i)] \\
\qquad = -\sum\limits_{i=0}^{m} \eta(t+h_i)A_i(t+h_i), \\
\qquad\qquad t_0 \le t \le T-h_m, \\
\dot{\eta}(t) + \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{d}{dt}[\eta(t+h_i)D_i(t+h_i)] \\
\qquad = -\sum\limits_{i=0}^{k} \eta(t+h_i)A_i(t+h_i), \\
\qquad\qquad T-h_{k+1} \le t \le T-h_k, \\
\qquad\qquad (k=0,1,2,\cdots,(m-1)), \\
\eta(T) = C'
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

的解 $\eta(t)$, 使得一个控制 $u^*(t)\in G\subset L_2[t_0,T]$ 满足

$$\eta(t)B(t)u^*(t)=\max_{u\in G}\{\eta(t)B(t)u(t)\} \tag{3.6}$$

则 $u^*(t)$ 必使得性能指标

$J(T)=C_1x_1(T)+C_2x_2(T)+\cdots+C_nx_n(T)=C'x(T)$

取得最大值. 这里 G 为控制变量的约束集.

证明: 由 (3.2) 可得

$$x^*(t)=x(t,\varphi)+\int_{t_0}^{t}Y(s,t)B(s)u^*(s)ds,$$

其中 $x(t,\varphi)$,$Y(s,t)$ 显然均与 $u^*(t)$ 无关.

对任意的 $u(t)$ 都有

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t,\varphi)+\textstyle\int_{t_0}^{t}Y(s,t)B(s)u(s)ds,\\ J(T)) &= C'x(T)=C'x(T,\varphi)\\ &\quad +\textstyle\int_{t_0}^{T}C'Y(s,T)B(s)u(s)ds. \end{aligned}$$

由于 $Y(s,t)$ 满足 (3.4), 所以 $\eta(t)=C'Y(t,T)$ 应满足 (3.5), 且初值为

$\eta(T)=C'Y(T,T)=C'I=C'$.

由此得, $\eta(t)$ 为 (3.5) 的唯一解.

$J(x(T))=C'x(T)=C'x(T,\varphi)+\int_{t_0}^{T}\eta(s)B(s)u(s)ds$,

又有

$J(\bar{x}(T))=C'\bar{x}(T)=C'x(T,\varphi)+\int_{t_0}^{T}\eta(s)B(s)u^*(s)ds$.

由条件 (3.6) 得 $J(\bar{x}(T))\geq J(x(T))$.

下面讨论 (3.1) 关于性能指标泛函

$$J(u)=g(x(T))+\int_{t_0}^{T}u'(s)U(s)u(s)ds$$

的最大值原理.

定义 3.1　对于系统

$$\begin{cases} \dot{x}^0(t) &= u'(t)U(t)u(t), & t_0 \le t \le T, \\ \dot{x}(t) & +\sum_{i=1}^{m} D_i(t)\dot{x}(t-h_i) \\ & = \sum_{i=0}^{m} A_i(t)x(t-h_i) + B(t)u(t), & t_0 \le t \le T, \\ x^0(t_0) &= 0, \\ x(t) &= \varphi(t), & t_0 - h_m \le t \le t_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

设 $x_u^0(t), x_u(t)$ 为该系统对应于可容控制的解，则对所有的可容控制 $u(t) \in L_2[t_0,$
$T]$, 所有响应的端点 $\hat{x} = (x_u^0(T), x_u(T)) \in R^{n+1}$ 所构成的集合 $\hat{K}(T)$ 称为可达集.

定理 3.2　系统 (3.3) 的可达集 $\hat{K}(T) \subset R^{n+1}$ 是凸集，并且它在超平面 $x^0 = 0$ 的正交射影 $K(T)$ 为一个线性流形．而且，如果 $\hat{y} = (y^0, y) \in \hat{K}(T)$, 则半直线 $x^0 \ge y^0, x = y$ 均在 $\hat{K}(T)$ 中.

该定理的证明与 [89] 相应的定理的证明相仿．同样，我们可得到:

定理 3.3　可达集 $\hat{K}(T)$ 在 R^{n+1} 中为闭集.

与 [89] 中的定理 3 的证明方法类似，我们还可证明:

定理 3.4　对系统 (3.1) 和性能指标

$$J(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} ||u(t)||_U^2 dt.$$

如果 (a)　$g(x)$ 有下界，即 $g(x) > a$, 或 (b)　$g(x)$ 是一个凸函数，则 (3.1) 存在一个最优控制.

定义 3.2　对于系统 (3.7), 若一个控制 $u(t) \in L_2[t_0, T]$ 能够使得响应 $\hat{x}(t)$ 在 $t = T$ 到 $\hat{K}(T)$ 的边界，则称之为极控制.

定理 3.5 对于系统 (3.7), 一个控制 $u^*(t)\in L_2[t_0,T]$ 是最优控制的充要条件是存在伴随方程 (3.5) 的一个非零解 $\eta(t)$, 使得

$$\begin{aligned}&-\tfrac{1}{2}||u^*(t)||_U^2+\eta(t)B(t)u^*(t)\\&\quad=\max_{u\in R^r}\{-\tfrac{1}{2}||u(t)||_U^2+\eta(t)B(t)u(t)\}\end{aligned}$$

或

$$u^*(t)=U(t)^{-1}B(t)'\eta(t)' \tag{3.8}$$

在 $[t_0,T]$ 上几乎处处成立.

证明：由于

$$x^*(t)=x(t,\varphi)+\int_{t_0}^t Y(s,t)B(s)u^*(s)ds,$$

其中 $x(t,\varphi)$(齐次方程的解),$Y(s,t)$(基础解) 均与 $u^*(t)$ 无关，也就是说，对任意的 $u(t)$, 其响应为

$$y(t)=x(t,\varphi)+\int_{t_0}^t Y(s,t)B(s)u(s)ds.$$

设

$$\hat{\eta}(T)=(-\tfrac{1}{2},\eta(T)),$$
$$\hat{y}(T)=(x^0(T),y(T)),$$

则

$$\begin{aligned}\hat{\eta}(T)\hat{y}(T)\quad&=-\tfrac{1}{2}x^0(T)+\eta(T)y(T)\\&=-\tfrac{1}{2}\int_{t_0}^T||u(s)||_U^2ds+\eta(T)x(T,\varphi)\\&\quad+\int_{t_0}^T\eta(T)Y(s,T)B(s)u(s)ds\\&=\eta(T)x(T,\varphi)+\int_{t_0}^T[-\tfrac{1}{2}||u(s)||_U^2\\&\quad+\eta(T)Y(s,T)B(s)u(s)]ds.\end{aligned}$$

设 $\eta_1(t)=\eta(T)Y(t,T)$, 显然 $\eta_1(t)$ 为 (3.5) 的解，且满足初始条件 $\eta_1(T)=\eta(T)$, 由 (3.5) 解的唯一性得 $\eta_1(t)=\eta(t)$ 故

$$\hat{\eta}(T)\hat{y}(T) = \eta(T)x(T,\varphi) + \int_{t_0}^{T}[-\tfrac{1}{2}||u(s)||_U^2 + \eta(T)Y(s,T)B(s)u(s)]ds,$$

$$\hat{\eta}(T)\hat{x}(T) = \eta(T)x(T,\varphi) + \int_{t_0}^{T}[-\tfrac{1}{2}||u^*(s)||_U^2 + \eta(T)Y(s,T)B(s)u^*(s)]ds,$$

因而有

$$\hat{\eta}(T)\hat{y}(T) \le \hat{\eta}(T)\hat{x}(T)$$

对 $\hat{K}(T)$ 中的任意 $\hat{y}(T)$ 成立.

这表明，在 $\hat{x}(T)$ 存在 $\hat{K}(T)$ 的一个支撑超平面，其法向量为 $\hat{\eta}(T)$.

因 $\eta_0 = -\frac{1}{2} < 0$, 而 $x^0 \ge 0$, 该超平面不与 $\hat{K}(T)$ 的内点相交，故它必与边界 $\partial\hat{K}(T)$ 相交．因而 $u^*(t)$ 是极控制.

反过来，如果 $u^*(t)$ 是极控制，则其响应 $\hat{x}(t)$ 可达 $\hat{K}(T)$ 的边界，即 $\hat{x}(t) \in \partial\hat{K}(T)$.

设 $\hat{\eta} = (-\frac{1}{2}, \bar{\eta}(T))$ 为在 $\hat{x}(T)$ 点，$\hat{K}(T)$ 的外法向量，并设 $\bar{\eta}(t)$ 为伴随方程 (3.5) 的，以 $\bar{\eta}(T)$ 为边值的解．我们要证 $u^*(t)$ 满足最大值原理．如若不然，设

$$-\tfrac{1}{2}||u^*(t)||_U^2 + \bar{\eta}(t)B(t)u^*(t) + \delta \le \max_{u\in R^r}\{-\tfrac{1}{2}||u(t)||_U^2 + \bar{\eta}(t)B(t)u(t)\},$$

$$u_1(t) = U(t)^{-1}B(t)'\bar{\eta}(t)',$$

则

$$-\tfrac{1}{2}||u^*(t)||_U^2 + \bar{\eta}(t)B(t)u^*(t) + \delta \le -\tfrac{1}{2}||u_1(t)||_U^2 + \bar{\eta}(t)B(t)u_1(t).$$

设 $\hat{x}_1$ 为 u_1 对应的响应，这时有

$$\begin{aligned}
&\hat{\eta}(T)\hat{x}(T)-\hat{\eta}(T)\hat{x}_1(T)\\
&\quad=\bar{\eta}(T)x(T,\varphi)+\int_{t_0}^{T}[-\tfrac{1}{2}||u^*(s)||_U^2\\
&\qquad+\bar{\eta}(T)Y(s,T)B(s)u^*(s)]ds\\
&\qquad-[\bar{\eta}(T)x(T,\varphi)+\int_{t_0}^{T}[-\tfrac{1}{2}||u_1(s)||_U^2\\
&\qquad+\bar{\eta}(T)Y(s,T)B(s)u_1(s)]ds]\\
&\quad=\int_{t_0}^{T}[-\tfrac{1}{2}||u^*(s)||_U^2+\bar{\eta}(T)Y(s,T)B(s)u^*(s)\\
&\qquad-(-\tfrac{1}{2}||u_1(s)||_U^2+\bar{\eta}(T)Y(s,T)B(s)u_1(s))]ds.
\end{aligned}$$

由于 $\bar{\eta}(T)Y(t,T)$ 仍为 (3.5) 的解，故

$$\hat{\eta}(T)\hat{x}(T)-\hat{\eta}(T)\hat{x}_1(T)\le\int_{t_0}^{T}(-\delta)ds=-\delta(T-t_0)<0.$$

即 $\hat{\eta}(T)\hat{x}(T)<\hat{\eta}(T)\hat{x}_1(T)$.

这是不可能的，因为 $\hat{\eta}(T)$ 为在 $\hat{x}(T)$ 点，$\hat{K}(T)$ 的外法向量．因而 $u^*(t)$ 满足最大值原理．定理 3.5 证毕.

定理 3.6　对系统 (3.7), 性能指标

$$J(u)=g(x(T))+\int_{t_0}^{T}||u(t)||_U^2dt.$$

如果 $g(t)$ 是 C^1 凸函数，则在族

$$S_C:g(x)+x^0=C$$

中，存在唯一的超平面 S_m, 使得 S_m 与 $\hat{K}(T)$ 相切，因而 m 为最小性能，而且存在一个唯一的最优控制 $u^*(t)=U(t)^{-1}B(t)'\eta^{*\prime}(t)$，其响应以 S_m 与 $\hat{K}(T)$ 的唯一交点为端点．这里 $\eta^*(t)$ 为 (3.5), 并满足 $\eta^*(T)=-\frac{1}{2}gradg(x(T))$ 的解.

该定理的证明与 [89] 中定理 6 的证明相类似. 故从略.

定理 3.6 是中立型线性控制系统的最大值原理, 用它可解决一大类经济管理、工业工程等领域中的最优控制问题. 下面我们举例说明该定理的应用.

例 3.1　在国民经济管理系统中, 设 $x(t)$ 为国民经济总收入, $u(t)$ 为 t 时期的投资.

如果在 t 时期的总收入的变化率与前一时期的收入、收入的变化率和 t 时期的投资都具有线性关系, 设

$$\dot{x}(t) = a\dot{x}(t-1) + bx(t-1) + cu(t), \tag{3.9}$$

这里 a, b, c 为常数.

为简单起见, 设 $-1 \leq t \leq 0$ 时 $x(t) \equiv 1$.

如何投资才能使 $x(2) = T$(常数) 并且使成本泛函

$$C(u) = \sqrt{\int_0^2 (u(t))^2 dt}$$

达到最小? 其最小值应为多少?

对于这个问题, 设

$$J(u) = C^2(u) = \int_0^2 (u(t))^2 dt,$$

只需求出使得 $J(u)$ 达到最小时的控制即可.

由 (3.5), 该系统的伴随方程为

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = a\dot{\eta}(t-1) - b\eta(t+1), & 0 \leq t \leq 1, \\ \dot{\eta}(t) = 0, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

令 $\eta(2) = k$, 则其解为

$$\begin{cases} \eta(t) = k, & 1 \leq t \leq 2, \\ \eta(t) = -kbt, & 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

由 (3.8), 最优控制为

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)'\eta(t)'$$
$$= c\eta(t) = \begin{cases} ck, & 1 \le t \le 2, \\ -kbct, & 0 \le t \le 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

故代入原方程 (3.9) 可得，当 $0 \le t \le 1$ 时,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b - kbc^2t, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

解之得 $x(t) = -\frac{1}{2}kbc^2t^2 + bt + 1.$

当 $1 \le t \le 2$ 时,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a[b - kbc^2(t-1)] + b[-\frac{1}{2}kbc^2(t-1)^2 \\ \qquad\qquad +b(t-1) + 1] + c^2k, \\ x(1) = -\frac{1}{2}kbc^2 + b + 1. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{aligned} x(t) = \; & -\tfrac{1}{6}b^2c^2(t-1)^3 + \tfrac{1}{2}(b^2 - kabc^2)(t-1)^2 \\ & +(ab + b + c^2k)(t-1) - \tfrac{1}{2}kbc^2 + b + 1. \end{aligned}$$

由 $x(2) = T$ 得

$$\begin{aligned} k = \; & \frac{T+\frac{1}{6}b^2c^2-\frac{1}{2}b^2-ab-2b-1}{-\frac{1}{2}c^2(ab+b-2)} \\ = \; & \frac{3b^2+6ab+12b+6-6T-b^2c^2}{3c^2(ab+b-2)} \end{aligned}$$

故最优控制为

$$u(t) = \begin{cases} \frac{3b^2+6ab+12b+6-6T-b^2c^2}{3c^2(ab+b-2)}, & 1 \le t \le 2, \\ -\frac{3b^2+6ab+12b+6-6T-b^2c^2}{3c(ab+b-2)}bt, & 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

而这时

$$\begin{aligned} J(u(2)) &= C^2(u) = \int_0^2 (u(t))^2 dt = \int_0^1 (-kbc)^2 t^2 dt + \int_1^2 (ck)^2 dt \\ &= \tfrac{1}{3}k^2b^2c^2 + c^2k^2 \\ &= \tfrac{1}{3}(b^2+3)c^2k^2 = \tfrac{(b^2+3)(3b^2+6ab+12b-6-6T-b^2c^2)^2}{27c^2(ab+b-2)^2}. \end{aligned}$$

故成本函数为

$$C(u) = \frac{\sqrt{3}\sqrt{b^2+3}|3b^2+6ab+12b-6-6T-b^2c^2|}{9|c||ab+b-2|}.$$

§6.4　时滞现金管理系统的最优控制

本节，我们建立一个时滞控制系统，这与实际现金管理系统非常接近. 通过运用时滞控制系统的最优控制的最新结果，给出其伴随方程和一般解，最后，给出其最优控制和用计算机求在任何时刻的最优控制的步骤. 这对时滞控制系统的最优控制在管理实践中的运用，将是有益的尝试.

近来，现代控制理论已经广泛地运用于经济管理系统. 特别是最优控制理论非常成功地运用于现金管理系统. 但是，我们注意到，现金管理系统一般说来为时滞控制系统. 我们必须运用时滞控制最优控制理论，才能更准确地解决其最优化问题.

有些学者，如 *SureshP.Sethi*, *GeraldL.Thompson*[21] 和潘群儒 [20]，已对现金管理系统的最优控制作了一些讨论. 他们指出，在现代经济管理过程中，一些单位 (如家庭，企业等) 的决策者，通常要面对这样一个问题：必须将部分资金以活期存入银行，以便当需要时可随时取出，同时将另一部分资金用来购买证券，以便

获得更多利息. 但他们所买的证券的量必须适当, 不然的话, 如果买的太多, 当急需时, 不得不卖出一些证券, 而且要付更多的钱给证券商. 为此, 他们给出了这类控制系统的数学模型, 并求出一些解. 但是, 他们都忽略了一个重要的事实, 这就是, 无论是以活期存入银行还是购买证券, 其利息不可能立即得到, 只能在一定时期以后才能得到. 这就是说, 它存在滞后现象. 我们必须对此作进一步地讨论.

本节对要讨论的现金管理系统, 我们总假定具有下列特点:

1. 所有的现金只存作两种形式, 即或者以活期存入银行, 或者购买证券;
2. 活期存款利息 r_1 和证券红利 r_2 均为常数;
3. 活期存款的量 $x_1(t)$ 和证券的量 $x_2(t)$ 均以现金的量 (元) 来记;
4. 购买或卖出证券, 必须以每元证券 α 元的证券交易费率 $(0 < \alpha < 1)$ 付给证券商;
5. 设 $u(t)$ 为证券购买 (> 0) 或出售 (< 0) 速率 (对 $u(t)$, 我们假定其不超过一定的范围, 不妨设 $|u(t)| \le 1$).

显然, 在任何时刻 t,$x(t)$ 的变化率等于现金的流入速率减去现金的流出速率. 这样我们可以得到时滞现金管理系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = r_1 x_1(t-1) + d(t) - u(t) - \alpha|u(t)|, \\ \dot{x}_2(t) = r_2 x_2(t-1) + u(t), \end{cases} \tag{4.1}$$

这里 $d(t)$ 为生产率 (> 0) 或消费率 (< 0).

这样我们要讨论的问题可化为, 当 $u(t)$ 为何值时, 在 T 时刻的钱的总数

$$J(T) = x_1(T) + x_2(T) \tag{4.2}$$

能够达到最大值？

对照系统 (1.1) 和 (1.2) 可见这是一个时滞控制系统，因而可用定理 1.1 的结论.

系统 (4.1) 的伴随方程为

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -r_1 p_1(t+1), & t_0 \le t \le T-1, \\ \dot{p}_1(t) = 0, & T-1 \le t \le T, \\ p_1(T) = -1, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_2(t) = -r_2 p_2(t+1), & t_0 \le t \le T-1, \\ \dot{p}_2(t) = 0, & T-1 \le t \le T, \\ p_2(T) = -1, \end{cases} \tag{4.4}$$

系统 (4.1) 的 *Hamilton* 函数为

$$\begin{aligned} H \quad &= p_1(t)[r_1 x_1(t-1) + d(t) - u(t) - \alpha|u(t)|] \\ &q + p_2(t)[r_2 x_2(t-1) + u(t)] \\ &= p_1(t) r_1 x_1(t-1) + p_2(t) r_2 x_2(t-1) + p_1(t) d(t) \\ &\quad +(p_2(t) - p_1(t) u(t) - \alpha p_1(t)|u(t)|) \\ &= p_1(t) r_1 x_1(t-1) + p_2(t) r_2 x_2(t-1) + p_1(t) d(t) \\ &\quad -\alpha p_1(t)[|u(t)| + \tfrac{1}{\alpha}(1 - \tfrac{p_2(t)}{p_1(t)}) u(t)]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

定理 4.1　对系统 (4.1)，当 $T-k-1 \le t \le T-k$, $(k = 0, 1, 2, \cdots [T])$ 时，其伴随方程 (4.3)(4.4) 的解为

$$p_1(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} p_1(T-k+i)[r_1(T-k-t)]^i,$$

$$p_2(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} p_2(T-k+i)[r_2(T-k-t)]^i.$$

证明：当 $T-1\le t\le T$ 时，$p_1(t)=-1$;

当 $T-2\le t\le T-1$ 时，$\dot{p}_1(t)=-r_1p_1(t+1)=r_1$，则 $p_1(t)=r_1(t-T+1)-1$;

当 $T-3\le t\le T-2$ 时，

$\dot{p}_1(t)=-r_1p_1(t+1)=-r_1^2(t-T+2)+r_1$,

则

$p_1(t)=-\frac{r_1^2}{2}(t-T+2)^2+r_1(t-T+2)+p_1(T-2)$;

当 $T-4\le t\le T-3$ 时，

$$\begin{aligned}\dot{p}_1(t)&=-r_1p_1(t+1)=\tfrac{r_1^3}{2}(t-T+3)^2\\&\quad-r_1^2(t-T+3)-r_1p_1(T-2),\end{aligned}$$

则

$p_1(t)=\frac{r_1^3}{3!}(t-T+3)^3-\frac{r_1^2}{2!}(t-T+3)^2+(-r_1)p_1(T-2)$ $(t-T+3)+p_1(T-3)$;

当 $T-5\le t\le T-4$ 时，

$$\begin{aligned}\dot{p}_1(t)&=-r_1p_1(t+1)\\&=-\tfrac{r_1^4}{3!}(t-T+4)^3+\tfrac{r_1^3}{2!}(t-T+4)^2\\&\quad+r_1^2p_1(T-2)(t-T+4)-r_1p_1(T-3),\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}p_1(t)&=\tfrac{r_1^4}{4!}p_1(T)(t-T+4)^4-\tfrac{r_1^3}{3!}p_1(T-1)(t-T+4)^3\\&\quad+\tfrac{r_1^2}{2!}p_1(T-2)(t-T+4)^2\\&\quad-r_1p_1(T-3)(t-T+4)+p_1(T-4)\\&=\sum_{i=0}^{4}\tfrac{1}{i!}p_1(T-4+i)[r_1(T-4-t)]^i.\end{aligned}$$

我们可以用数学归纳法证明，当 $T-k-1\le t\le T-k$，$(k=0,1,2,\cdots,[T])$ 时，有

$$p_1(t)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}p_1(T-k+i)[r_1(T-k-t)]^i. \tag{4.6}$$

同理，由 (4.5) 我们也可以用数学归纳法证明，当 $T-k-1 \leq t \leq T-k$，$(k=0,1,2,\cdots,[T])$ 时，有

$$p_2(t)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}p_2(T-k+i)[r_2(T-k-t)]^i. \tag{4.7}$$

定理 4.1 证毕.

显然 $p_1(t)<0, p_2(t)<0$.

由 (4.5) 和定理 1.1 可得

定理 4.2　对系统 (4.1) 关于性能指标 (4.2) 的最优控制为

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{cases} 0, & \frac{1}{\alpha}|1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}|\leq 1, \\ -sign\frac{1}{\alpha}(1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}), & \frac{1}{\alpha}|1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}|>1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & |1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}|\leq\alpha, \\ -sign(1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}), & |1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}|>\alpha. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.8}$$

由 (4.6)(4.7)(4.8) 和条件 $p_1(t)=p_2(t)=-1(T-1\leq t\leq T)$，对于任何给定的 T, r_1, r_2 和 α，我们可以直接用计算机求得最优控制．其求解步骤可为

1. 由 (4.6) 和 $p_1(t)=-1(T-1\leq t\leq T)$，我们可求 $p_1(t)$ 在 $[t_0,T]$ 上的值；

2. 由 (4.7) 和 $p_2(t)=-1(T-1\leq t\leq T)$，我们可求 $p_2(t)$ 在 $[t_0,T]$ 上的值；

3. 计算 $\frac{p_2(t)}{p_1(t)})$ 的值；

4. 如果 $|1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}|\leq\alpha$，则有 $u(t)=0$，

   如果 $|1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}|>\alpha$，则有 $u(t)=-sign(1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)})$.

通过上述方法，我们当然可以用计算机求得 $[t_0,T]$ 上任何时刻的最优控制．但是，为了更进一步说明问题，我们可给出一些讨论．

显然，当 $T-1\le t\le T$ 时，$p_1(t)=p_2(t)=-1$，所以 $|1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}|=0<\alpha$，则有 $u(t)=0$.

当 $T-2\le t\le T-1$ 时，可分为如下几种情况：

1. 如果我们要 $1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}\le\alpha$，只要 $1-\alpha\le\frac{p_2(t)}{p_1(t)}$ 即可，$\Leftarrow p_2(t)\le(1-\alpha)p_1(t)$，即 $r_1(t-T+1)-1<(1-\alpha)(r_1(t-T+1)-1),\Leftarrow$
$$t\le T-1+\frac{\alpha}{r_2-(1-\alpha)r_1},$$
由于 $t\le T-1$，故上述不等式总是成立的.

2. 如果我们要 $1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}>0,\Leftarrow p_2(t)-p_1(t)>0$
$$\Leftarrow(r_2-r_1)(t-T+1)>0,\Leftarrow t-T+1>0,$$
这与 $t\le T-1$ 矛盾，故 $1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}>0$ 不可能成立.

3. 如果我们要
$$1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}\ge-\alpha,\Leftarrow((1+\alpha)r_1-r_2)(t-T+1)\le\alpha$$
(i) 当 $(1+\alpha)r_1>r_2$ 时，
$\Leftarrow t-T+1\le\frac{\alpha}{(1+\alpha)r_1-r_2}\Leftarrow t\le T-1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)r_1-r_2}$
由于 $t\le T-1$，所以 $1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}\ge-\alpha$ 总成立.
(ii) 当 $(1+\alpha)r_1<r_2$ 时，即 $\alpha<\frac{r_2-r_1}{r_1}$，我们需要 $t-T+1>\frac{\alpha}{(1+\alpha)r_1-r_2}\Leftarrow t>T-1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)r_1-r_2}$. 这样，如果 $t\le T-1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)r_1-r_2}$，必有 $1-\frac{p_2(t)}{p_1(t)}<-\alpha$. 这时我们有
$$u(t)=\begin{cases}0, & T-1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)r_1-r_2}<t\le T-1,\\ 1, & T-2\le t\le T-1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)r_1-r_2}.\end{cases}$$

由上面的讨论可见，最优控制 $u(t)$ 的值直接与 r_1, r_2 和 α 有关.

特别是，如果 $T=2$, 我们有

1. 当 $(1+\alpha)r_1 > r_2$ 时， $u(t)=0, \quad (0 \le t \le 2)$;

2. 当 $(1+\alpha)r_1 < r_2$ 时，

$$u(t)=\begin{cases} 0, & 1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)r_1-r_2} < t \le 2, \\ 1, & 0 \le t \le T-1+\frac{\alpha}{(1+\alpha)r_1-r_2}. \end{cases}$$

由此，我们可以得到，当活期存款利息 r_1 大于 $\frac{r_2}{1+\alpha}$ 时，我们不必购买证券；只有当活期存款利息 r_1 小于 $\frac{r_2}{1+\alpha}$ 时，才考虑购买证券.

当 $T>2$ 时，情况将更为复杂，讨论起来要困难一些，但是，我们可以用计算机和以上给出的方法，求出最优控制.

参 考 文 献

[1] 郑祖庥, 泛函微分方程理论, 安徽教育出版社, 合肥, 1994. 12.

[2] Hale J., Theory of Functional Differential Equations, Springer Verlay, 1992.

[3] 李森林、温立志, 泛函微分方程, 湖南科技出版社, 1986.

[4] 秦元勋、刘永清、王联、郑祖庥, 带有时滞的动力系统运动稳定性, 科学出版社, 1989.

[5] F.R.Gantmacher, The theory of Matrice, Vol.2, New York, Chelsea, 1974.

[6] Boyarinchev, U.E., Solution of Ordinary Differential Equation of Degenerate System, (Russian), Science, 1988.

[7] S.L.Campbell, Singular Systems of Differential Equation (II), Pitman, 1982.

[8] L.Dai, Singular Control Systems, Springer Verlag, 1989.

[9] 张金水, 广义系统经济控制论, 清华大学出版社, 北京, 1990.

[10] 刘永清、唐功友, 大型动力系统的理论与应用 (卷 3), 滞后 · 稳定与控制, 华南理工大学出版社, 1992.

[11] 谢绪恺, 现代控制理论基础, 辽宁人民出版社, 1980.

[12] 刘永清、关治洪，大型动力系统的理论与应用 (卷 5)，测度型脉冲大系统的稳定·镇定与控制，华南理工大学出版社，1996.

[13] Wieslaw Krawcewicz and JianHong Wu, Theory of Degrees with Applications to Bifurcations and Differential Eqations, John Wiley and Sons, Inc.1996.

[14] 吴微，解非线性分枝问题的扩展方程方法，科学出版社，1993.

[15] 郑祖庥，滞量与周期解的存在性，安徽大学学报，1981, No.2, 22—28.

[16] 刘正荣、李继彬，哈密顿系统与时滞微分方程的周期解，科学出版社，1996.

[17] Jean-Pierre Aubin and Arrigo Cellina, Differential Inclusions, Springer-Verlag, 1984.

[18] 夏小华、高为炳，非线性控制及解耦，科学出版社，1993.

[19] 韩正之，线性系统的 (A, B) 特征子空间与大系统分散控制，科学出版社，1993.

[20] 潘群儒，经济管理动态系统优化，中国科技大学出版社，合肥，1993.

[21] Suresh P.Sethi and Gerald L.Thompson, Optimal Control Theory —Applications to Management Science, Martinus Nijhoff, 1981.

[22] Daniel Cobb, Controllability , Observability, and Duality in Singular Systems, IEEE Trans. Automat.Contr., 1984, AC29(12), 601—611.

[23] 龚德恩，经济控制论概论，中国人民大学出版社，1988.

[24] 郑祖庥，滞量对解的存在唯一性的影响，安徽大学学报，1983, No.1, 1—5.

[25] 杨万年，微分流形机其应用，重庆大学出版社，1992.

[26] 郑祖庥，非“R.N.A 型 FDE”的发展与应用，安徽大学学报，1994, No.1.

[27] 蒋威，关于可与其渐缩线叠合的平面曲线方程，工科数学，1992, No.4.

[28] 任洪善，一类有界滞量的自治 RFDE 的变异性，第二次全国 FDE 交流，1982.

[29] 王克，可变时滞泛函微分方程的基本理论，东北师范大学硕士论文.

[30] Yip E.L.and R.F.Sincovec, Solvability, Controllability and Observability of Continuous Descriptor Systems, IEEE Trans.AC26.3, 1981, 702—706.

[31] 郑祖庥，泛函微分方程的发展和应用，数学进展，1983, No.2, 94—111.

[32] 王朝珠、戴立意，广义动态系统，控制理论与应用，Vol.3, No.1, 1986, 2—12.

[33] 王朝珠、戴立意，广义系统的状态观测器，第五界全国控制理论及其应用学术交流会议论文集，上册，1985, 31—15.

[34] 谭连生、范文涛，奇异系统的稳定化通过一般状态反馈的可解性，自动化学报，1997, No.1.

[35] 杨成梧、邹云，脉冲能控广义系统的输出稳定化，控制与决策，1989, 1, 44—48.

[36] 谭连生, 奇异系统能量受限的输出调节通过一般状态反馈的可能性, 控制理论与应用, 1993, 10(6), 724—727.

[37] 杨成梧、邹云, 广义系统的输出稳定化通过 MPD 反馈的可解性, 控制理论与应用, 1989, 6(1), 43—50.

[38] 刘晓平、张嗣瀛, 非线性奇异系统的线性化, 信息与控制, 1993, No.4, 209—214.

[39] 刘晓平、张嗣瀛, 单输入非线性奇异系统的线性化, 控制与决策, 1992, No.5, 372—376.

[40] 戴立意、王朝珠, 广义系统结构稳定的正常动态补偿器, 系统科学与数学, 1987, 7(1), 89—93.

[41] 高志伟、王先来、李光泉、王江, 广义分散控制系统的闭环正则性, 系统工程理论与实践, 1996, No.9, 1—4.

[42] 高志伟、李光泉, 广义分散前馈控制系统固定模的进一步研究, 自动化学报, 1996, 22(2).

[43] 王迎军、潘德慧, 矩阵变换法求解广义系统与广义系统的分层特征, 控制理论与应用, 1995, No.4, 445—451.

[44] 张庆灵、胡仰曾, 广义分散控制系统的结构脉冲固定模, 系统科学与数学, 1993, No. 2, 97—101.

[45] 高志伟、李光泉、王江, 广义线性系统的分散控制, 控制理论与应用, 1995, No.2, 236—240.

[46] 谢绪恺、荆海英, 分散控制系统的固定模式, 自动化学报, 1986, No.2, 185—189.

[47] Wang DianHui, Xie Xukai, Elimination of Impulsive Modes by Output Feedback in Descriptor Systems, 控制理论与应用, 1995, No.3, 371—376.

[48] 谢绪恺、王殿辉、林崇、程学建，广义分散控制系统的固定模的统一判定，自动化学报， 1995, No.2, 145—153.

[49] 严星刚、杨峻松、张嗣瀛，非线性奇异控制系统的解耦线性化，控制理论与应用， 1996, No.6, 833—837.

[50] 王朝珠、王恩平、广义分散控制系统的无穷远固定模，系统科学与数学， 1988, No.2, 142—150.

[51] 许可康、韩京清，奇异系统的一类新型观测器，控制理论与应用， 1995, No.3, 358—362.

[52] 许可康、吴荣，线性奇异系统的滤波问题，科学通报，1994, No. 10, 874—877.

[53] Shui-Nee Chow and Wenzhang Huang, Singular Perturbation Problems for a System of Differential-Difference Equations, J.Differential Equitions 112(2), (1994), 257—307.

[54] Jiang Wei(蒋威) and Zheng Zuxiu, On the Degenerat Differential Systems with Delay, Ann.Diff.Equs., Vol.14, No.2, 1998.

[55] 蒋威，广义时滞控制系统的输出反馈正常化，安徽大学 96 学术活动月论文选编，安徽大学出版社，合肥， 1996, 310—313.

[56] 蒋威、郑祖庥、徐建华，退化时滞微分系统解的指数估计，待发表.

[57] 蒋威，退化时滞微分系统的可解性，待发表.

[58] 王志成、文贤章、庾建设，具时滞的竞争模型的分枝，全国第六次泛函微分方程学术会议交流论文， 1997.

[59] 蒋威，退化中立型微分系统的常数变易公式和通解，应用数学学报， 1998 年第 4 期.

[60] 蒋威、郑祖庥, 退化时滞微分系统的通解, 待发表.

[61] 郑祖庥、蒋威, 关于不连续 FDE 与退化 FDE 的几个问题, 全国第六次泛函微分方程学术会议交流论文, 1997, 6.

[62] 蒋威, 滞后控制系统的能控性与终点时刻间的相关性, 安徽大学 95 学术活动月论文选粹, 安徽大学出版社, 合肥, 1995, 63—66.

[63] 蒋威、郑祖庥, 退化时滞差分系统的解, 数学研究, Vol.31, No.1, 1998, 44—50.

[64] Zhang Shunian, Stability of infinite Delay Difference Systems, NonlinearAnalysis, Theory, Methods and Applications, Vol.22, No.9, 1994, 1121—1129.

[65] 时宝、王志成、黄立宏, 有限时滞差分方程的稳定性, 全国第五届常微分方程稳定性理论及应用学术会议论文集, 30-33, 刘永清等编, 大连海事大学出版社, 1996.

[66] Shi B., Wang Z. C. and Qian X. Z., Uniform stability in sequential difference equations, submitted.

[67] 时宝、王志成、庾建设, 时滞差分方程零解全局渐近稳定的充分必要条件及其应用, 数学学报, 已录用.

[68] Shi B., Wang Z. C. and Yu J. S., Asymptotoic constancy of solutions of linear parabolic Volterra difference equations, Computers Math. Applic., 32(1996), 8, 65-77.

[69] Shi B., Wang Z. C. and Yu J. S., Global asymptotoic stability in a nonlinear nonautonomous difference equation with delays, Computers Math.Applic., accepted.

[70] 时宝、王志成、庾建设, 时滞差分方程的正解与全局渐近稳定性, 高校应用数学学报, 12A(1997), 1.

[71] Shi B., Wang Z. C. and Yu J. S., Square summable stability and existence of positive solutions in neutral Volterra difference equations, to appear.

[72] Shi B., Wang Z. C. and Yu J. S., Square summable stability in neutral parabolic Volterra difference equations, Methods Appl. Anal., 3(1996), 2, 273-284.

[73] Shi B., Wang Z. C. and Yu J. S., Stability and boundedness in difference systems with finite delay, Mathl.Comput.Modelling, accepted.

[74] J.Kato, On Liapunov-Razumikhin type theorems for functional differential equations, Funkcialaj Ekvacioj, 16(1973), 225—239.

[75] 王志成、钱祥征, 中立型泛函微分方程的稳定性理论, 全国第一届泛函微分方程学术会议交流资料.

[76] 王志成、钱祥征, 泛函微分方程的李雅普诺夫方法, 湖南大学学报, 3(1979), 15—24.

[77] 蒋威, 无穷时滞 NFDE 的指数稳定性, 安徽大学学报, 1991, No.1.

[78] Jiang Wei(蒋威), The M_0-stability of Solutions of Retarded Functional Differential Equations, Ann.of Diff.Eqs., 1993, No.1.

[79] 蒋威, 无穷时滞 NFDE 的稳定性, 淮北煤师院学报, 1994, No.3.

[80] 秦元勋、俞元洪, 一类有时滞的微分系统的无条件稳定性, 控制理论与应用, 1(1984).

[81] 辛云冰、蒋威, 关于滞后常系数线性微分方程 V- 泛函存在的充要条件, 安徽大学学报, Vol.20, No.3, 1996, 24—28.

[82] 关治洪，奇异系统的某些性质及其与奇异脉冲系统的稳定性等价，应用数学， 1997, 10(1), 96—100.

[83] 张庆灵，广义系统结构稳定性判别的李亚普诺夫方法，系统科学与数学， 1994, 14(2), 117—120.

[84] 黄文璋， n 阶常系数线性时滞微分方程无条件稳定的代数判据，安徽大学学报， 1983, No.1, 26—32.

[85] 寥晓昕，超越函数 $f_n(\lambda, e^{-\lambda\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} Det(a_{ij} + b_{ij}e^{-\lambda\tau} - \delta_{ij}\lambda)_{n\times n}$ 零点全分布在复平面左半部的代数充分准则，科学通报， 1982, No.10, 577—580.

[86] Jiang Wei(蒋威), Wang Zhicheng and Zheng Zuxiu, The V-functional Method for the Stability of Degenerate Differential Systems with Delays, Diff.Equas.Dyn.Sys., (已接收).

[87] Jiang Wei(蒋威), Wang Zhicheng and Zheng Zuxiu, Algebraic Critera of Stability for All Values of the Delays of Three-Dimensional Degenerate Differential Systems with Delays, (To appear).

[88] 蒋威、郑祖庥，二维退化时滞微分系统全时滞稳定的代数判据，数学季刊， 1998 年第 1 期.

[89] D.H.Chyung and E.Bruce Lee, Linear Optimal Systems with Delays, J.SIAM Control Vol4, No.3, 1966, 548—575.

[90] 蒋威，滞后非线性系统的一般化最优控制，安徽大学学报， Vol.20, No.2, 1996, 16—21.

[91] Jiang Wei(蒋威), Optimal Control of Financial Management Systems with Delay, Ann.of Diff. Eqs., Vol.13, No.2, 1997, 146—153.

[92] 蒋威，中立型线性控制系统的最优控制，工科数学，Vol.11, No.2, 1995, 17—23.

[93] 蒋威、郑祖庥，状态右端受限的滞后控制系统的最优控制，应用数学和力学， Vol.20, No.9, 1997, 813—818.

[94] Ronald B.Zmood, The Euclidean Space Controllability of Control Systems with Delay, SIAM.J. Control, Vol.12, No.4, 1974, 609—623.

[95] Leonard Weiss, On the Controllability of Delay-Differential Systems, SIAM J.Control, Vol.5, No.4, 1967, 575—587.

[96] 王殿辉，广义系统 C- 可控性的一个注记，控制与决策，Vol.9, No.6, 1994, 479—480.

[97] 张国山、谢绪恺，广义分散控制系统的 DR- 能控性，控制理论与应用， Vol.12, No.6, 1995, 704—711.

[98] 唐万生、李光泉，广义系统的能控性、能观性判别条件，自动化学报， Vol.21, No.1, 1995.

[99] Jiang Wei(蒋威), The Output Controllability of Linear System with Delay, Ann.of Diff.Eqs., Vol.10, No.5, 1995, 39—43.

[100] 蒋威，一类具独立子系统的广义时滞控制系统的能控性，待发表.

[101] 蒋威、魏晓君，关于滞后的自治线性控制系统的能控性的注记，安徽大学学报， 1994, No.2.

[102] 蒋威、王志成，广义时滞控制系统的能控性，待发表.

[103] 蒋威，中立型线性控制系统的能控性，中国控制论会议论文集，科学技术出版社，北京， 1995, 121—128.

[104] 蒋威，非线性中立型控制系统的函数能控性，数学研究，Vol.29, No.4, 1996, 55—60.

[105] 蒋威，当代社会科学大词典 (系统论和控制论部分), 南京大学出版社， 1995.

[106] 蒋威，关于决策态度对决策的影响，安徽大学学报，Vol.22, No.1, 1998, 27—31.

[107] Jiang Wei(蒋威) and Zheng Zuxiu, The Optimal Control of Delay Control Systems with Restricted State Right Endpoint, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), Vol.18, No.9, 1997, 871—876.